
Équation de Bessel

Proposition — *On considère l'équation dite de Bessel*

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0.$$

L'unique solution bornée au voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$ est la solution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta.$$

DÉMONSTRATION

Soit f une solution développable en série entière en 0.

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en 0 de rayon de convergence $R > 0$.

Par hypothèse, on vérifie

$$\begin{aligned} & \forall |x| < R, x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall |x| < R, a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \text{ par unicité du développement} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = a_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{(k+2)^2} = a_0 \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \end{cases} .$$

Comme $f(0) = 1$, on a

$$\forall |x| < R, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Alors

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{4^n (n!)^2 |x|^2}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} = \frac{|x|^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc par critère de D'Alembert, la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que le rayon de convergence est infini.

Donc $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est bien solution sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha > 0$. Soit $g :]0; \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $]0; \alpha[$ telle que (f, g) soit libre.

On suppose g bornée au voisinage de 0.

On calcule le wronskien de f et g :

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

On dérive le wronskien :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; \alpha[, W(f, g)'(x) &= f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) \\ &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \\ &= f(x) \left(-\frac{g'(x)}{x} - g(x) \right) + g(x) \left(\frac{f'(x)}{x} + f(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} (g(x)f'(x) - f(x)g'(x)) \\ &= -\frac{1}{x} W(f, g)(x) \end{aligned}$$

Au vu de l'équation différentielle que vérifie le wronskien, on en déduit que

$$\forall x \in]0; \alpha[, W(x) = \frac{A}{x} \text{ où } A \neq 0.$$

Donc

$$\forall x \in]0; \alpha[, \quad f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = \frac{A}{x}.$$

Comme g est bornée au voisinage de 0, g admet une limite finie en 0. De plus $f(0) = 1$ et au vu de l'équation (E), $f'(0) = 0$. Donc

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{A}{x}.$$

Quitte à changer g pour $-g$ (l'équation de Bessel est linéaire), on peut supposer sans perte de généralité que $A > 0$.

En particulier, il existe $x_0 \in]0; \alpha[$ tel que

$$\forall x \in]0; x_0], \quad g'(x) \geq \frac{A}{2x}.$$

On intègre cette inégalité :

$$\forall x \in]0; x_0], \quad g(x_0) - g(x) = \int_x^{x_0} g'(t) dt \geq \int_x^{x_0} \frac{A}{2t} dt = \frac{A}{2} (\ln(x_0) - \ln(x))$$

soit

$$g(x) \leq \frac{A}{2} (\ln(x) - \ln(x_0)) + g(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Absurde. g n'est donc pas bornée au voisinage de 0.

Ainsi f est la seule solution de (E) bornée au voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$.

Comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \cos(x \sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de régularité sous l'intégrale sur un segment, h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) d\theta$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(\theta)^2 \cos(x \sin(\theta)) d\theta.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & xh''(x) + h'(x) + xh(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(1 - \sin(\theta)^2) \cos(x \sin(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(\theta)^2 \cos(x \sin(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} [\cos(\theta) \sin(x \sin(\theta))]_0^\pi \\ &= 0 \text{ car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Comme $h(0) = 1$, par unicité de la solution bornée telle que $y(0) = 1$, on a $f = h$. $\square$