Endomorphismes semi-simples

Théorème
$f \in \mathcal{L}(E)$ *est semi-simple si et seulement si* π_f *est sans facteur carré.*

DÉMONSTRATION
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On écrit la décomposition en facteurs irréductibles de son polynôme minimal dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{r} M_i^{\alpha_i}.$$

Étape 1 Pour tout sev F stable, $F = \bigoplus_{i=1}^{r} \left[\ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F \right]$.

Bien sûr on a l'inclusion $\bigoplus_{i=1}^{r} \left[\ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F \right] \subset F$.

D'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker M_i^{\alpha_i}(f)$.

On note ρ_i la projection sur $\ker M_i^{\alpha_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker M_j^{\alpha_j}$. On sait que ρ_i est un polynôme en f.

Comme ρ_i est un polynôme en f et F est f-stable, $\rho_i(F) \subset F$.
Plus précisément, $\rho_i(F) \subset \ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F$.
Comme $\mathrm{Id} = \rho_1 + \cdots + \rho_r$, on a

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i(F) \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \left[\ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F \right].$$

Étape 2 Montrer que si π_f est irréductible alors f est semi-simple.

Soit F un sous-espace f-stable.
Si $F = E$ alors $\{0\}$ est un supplémentaire f-stable.

On suppose $F \neq E$. Il existe $x_1 \in E - F$.
On pose

$$E_{x_1} = \big\{P(f)(x),\ P \in K[X]\big\}.$$

qui est un sous-espace f-stable de E.

On pose

$$I_{x_1} = \big\{P \in K[X] \ / \ P(f)(x_1) = 0\big\}$$

qui est un idéal non nul (car π_f en est un élément)de l'anneau principal $K[X]$.

Par principalité, il existe $\pi_{x_1} \in K[X]$ tel que $I_{x_1} = (\pi_{x_1})$. En particulier, π_{x_1} divise π_f. Par irréductibilité, on conclut

$$\pi_{x_1} = \pi_f \text{ qui est donc irréductible.}$$

Soit $y \in F \cap E_{x_1}$ tel que $y \neq 0$.
Il existe $P \in K[X]$ tel que $y = P(f)(x_1)$. Comme $y \neq 0$, $P \notin I_{x_1}$ soit π_{x_1} ne divise pas P.
Par irréductibilité de π_{x_1}, on en déduit que π_{x_1} et P sont premiers entre eux.
Donc par identité de Bézout, il existe $U, V \in K[X]$ tels que

$$UP + V\pi_{x_1} = 1.$$

D'où

$$U(f) \circ P(f)(x_1) = x_1.$$

Comme $y \in F$, par f-stabilité de F, $x_1 = U(f)(y) \in F$. Absurde.

Donc $F \cap E_{x_1} = \{0\}$ ce qui implique que F et E_{x_1} sont en somme directe.

Si $E = F \oplus E_{x_1}$ alors c'est suffisant. Sinon on choisit $x_2 \in E - \big(F \oplus E_{x_1}\big)$ et on procède par récurrence (on peut puisque E est de dimension finie).

Étape 3 Montrer que f est semi-simple $\Rightarrow \pi_f$ n'a pas de facteur carré.

On suppose que f semi-simple et qu'il existe un facteur carré dans la décomposition en facteurs irréductibles de π_f, c'est-à-dire qu'il existe $M, N \in K[X]$ tels que

$$\pi_f = M^2 N.$$

On pose $F = \ker MN(f)$.
Comme F est f-stable, par hypothèse, il existe un supplémentaire G de F qui est f-stable.

Par définition $\forall x \in F,\ MN(f)(x) = 0$.

Soit $x \in G$.
Comme G est f-stable, $MN(f)(x) \in G$.
Comme $M(f) \circ MN(f)(x) = \pi_f(f)(x) = 0$ et $\ker M(f) \subset \ker MN(f) = F$, on a $MN(f)(x) \in F$.
Donc $MN(f)(x) \in F \cap G = \{0\}$.

Ainsi MN est un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à π_f. contradiction.

Étape 4 Montrer que π_f n'a pas de facteur carré $\Rightarrow f$ est semi-simple.

Soit F un sous-espace f-stable de E.
D'après les hypothèses, le polynôme minimal de f s'écrit

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{r} M_i.$$

Pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on pose $F_i = \ker M_i(f)$.

D'après la première étape, on a

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} [F_i \cap F].$$

Comme les F_i sont stables par f, on peut définir les restrictions f_i à F_i.
Comme $M_i(f_i) = 0$, par irréductibilité, M_i est le polynôme annulateur de f_i.

Alors d'après la deuxième étape, f_i est semi-simple. Donc $F \cap F_i$ admet un supplémentaire G_i f-stable dans F_i.

Donc $G = \bigoplus_{i=1}^{r} G_i$ est un sous-espace f-stable supplémentaire de F. $\square$