
Ellipsoïde de John Loewner

Lemme — *Le déterminant est strictement logarithmiquement concave sur l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.*

DÉMONSTRATION

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives distinctes.

Par existence de la décomposition de Cholesky, il existe $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$M = {}^t B \cdot B.$$

Comme $({}^t B)^{-1} N B^{-1}$ est symétrique définie positive, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$({}^t B)^{-1} N B^{-1} = P D {}^t P.$$

Si on pose $Q = P B$ alors

$$M = {}^t Q \cdot Q \text{ et } N = {}^t Q D Q.$$

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

$$\begin{aligned}
\det(\alpha M + \beta N) &= \det({}^t Q(\alpha I_n + \beta D)Q) \\
&= \det(Q)^2 \det(\text{diag}(\alpha + \beta D_{1,1}, \dots, \alpha + \beta D_{n,n})) \\
&= \det(Q)^2 \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta D_{i,i}) \\
&= \det(Q)^2 \prod_{i=1}^n \exp(\ln(\alpha + \beta D_{i,i})) \\
&> \det(Q)^2 \prod_{i=1}^n \exp(\alpha \ln(1) + \beta \ln(D_{i,i})) \text{ ce qui a un sens car } D_{i,i} > 0 \\
&\text{par stricte concavité du logarithme car } D \neq I_n \\
&= \det(Q)^2 \prod_{i=1}^n (D_{i,i})^\beta \\
&= \det(Q)^2 \det(I_n)^\alpha \det(D)^\beta \\
&= \det({}^t Q \cdot Q)^\alpha \det({}^t Q D Q)^\beta = \det(M)^\alpha \det(N)^\beta. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition — *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit K un compact d'intérieur non vide de E . Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .*

DÉMONSTRATION

Soit q une forme quadratique définie positive sur E .

Par hypothèse, la matrice de q est symétrique définie positive.

D'après le théorème spectral, cette matrice est diagonalisable de valeurs propres strictement positives $a_1, \dots, a_n$.

On calcule le volume V_q de l'ellipsoïde centré en 0 associé à q .

$$\begin{aligned}
V_q &= \int_{q(x) \leq 1} 1 \, dx \\
&= \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2} 1 \, dx \text{ dans la bonne base orthonormale} \\
&= \int_{y_1^2 + \dots + y_n^2} \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \, dy \text{ par le changement de variables } y_i = \sqrt{a_i} x_i \\
&= \frac{\lambda(\mathbb{B})}{\sqrt{\det(q)}} \text{ où } \mathbb{B} \text{ désigne la boule unité.}
\end{aligned}$$

On munit l'espace Q des formes quadratiques sur E de la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|.$$

On considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{q \in Q^+ \mid \forall x \in K, q(x) \leq 1\}.$$

- Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : q \mapsto q(x)$ est continue.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= Q^+ \cap \bigcap_{x \in K} \varphi_x^{-1}([0; 1]) \\
&= \bigcap_{x \in E} \varphi_x^{-1}([0; +\infty[) \cap \bigcap_{x \in K} \varphi_x^{-1}([0; 1]) \text{ est un fermé de } Q.
\end{aligned}$$

- Comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $\overline{\mathbb{B}}(a, r) \subset K$.

Soit $q \in \mathcal{A}$. Soit $x \in E$, $\|x\| \leq r$.

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2.$$

Alors

$$\forall \|x\| \leq 1, q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$$

soit

$$N(q) \leq \frac{4}{r^2}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est borné.

-
- Comme K est compact, il existe $M > 0$ tel que $K \subset \mathbb{B}(0, M)$.
On définit la forme quadratique q_0 par

$$\forall x \in E, q_0(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}.$$

Alors $\forall x \in K, q_0(x) \leq 1$ ce qui implique $q_0 \in \mathcal{A} \neq \emptyset$.

- Soient $q, q' \in \mathcal{A}$. Soit $\lambda \in [0; 1]$.
Bien sûr, $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in Q^+$.
De plus pour tout $x \in K, (\lambda q + (1 - \lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \leq 1$.
Donc $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in \mathcal{A}$ qui est convexe.

Comme Q est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, on conclut que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q .

Comme l'application $\det : Q \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son maximum sur le compact non vide $\mathcal{A}$ en un $q_1 \in \mathcal{A}$.

Comme $q_0 \in \mathcal{A}$ est définie positive, $\det q_0 > 0$. En particulier, $\det q_1 \geq \det q_0 > 0$ donc q_1 est définie positive aussi.

Cela signifie qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ (associé à q_1) qui contient K . Comme $\det q_1$ est maximal, le volume V_{q_1} de l'ellipsoïde est minimal.

On suppose qu'il existe $q_2 \in \mathcal{A}$ tel que $\det q_2 = \det q_1$ et $q_2 \neq q_1$.

Par convexité de $\mathcal{A}$, on a $\frac{1}{2}(q_1 + q_2) \in \mathcal{A}$.

Alors, par stricte convexité logarithmique du déterminant sur l'ensemble des matrices symétriques,

$$\det \left(\frac{1}{2}(q_1 + q_2) \right) = \det \left(\frac{1}{2}(S_1 + S_2) \right) > \sqrt{\det S_1 \det S_2} = \det S_1 = \det q_1.$$

Absurde par maximalité de $\det q_1$.

Donc $q_1 = q_2$. □