
Fonction de Takagi

Proposition — On note Δ la fonction 1-périodique définie par

$$\forall |x| \leq \frac{1}{2}, \Delta(x) = |x|.$$

On appelle fonction de Takagi la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}.$$

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et n'est dérivable en aucun point.

DÉMONSTRATION

Comme Δ est bornée sur $\mathbb{R}$, la série qui définit f est normalement convergente. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par convergence uniforme de la série (car normale), f est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \Delta(2^p x)$ est $\frac{1}{2^p}$ -périodique, la fonction f est 1-périodique.

Il suffit donc de montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0; 1[$.

Soit $x \in [0; 1[$. On considère son écriture diadique propre :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

avec $\varepsilon_k \in \{0; 1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{2^n}$.

Soit $p \geq n$.

Comme $2^p x_n \in \mathbb{N}$ et $2^p y_n \in \mathbb{N}$, on a $\Delta(2^p x_n) = \Delta(2^p y_n) = 0$.

Soit $p < n$. On a l'encadrement

$$0 \leq \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \leq \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leq \sum_{k=p+2}^n \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leq \frac{1}{2}.$$

Si $\varepsilon_{p+1} = 0$, alors

$$\Delta(2^p x_n) = \Delta \left(N + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right) = \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \text{ d'après la définition de } \Delta$$

et

$$\Delta(2^p y_n) = \Delta \left(N' + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \right) = \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}.$$

D'où

$$\Delta(2^p y_n) - \Delta(2^p x_n) = \frac{1}{2^{n-p}}.$$

Si $\varepsilon_{p+1} = 1$, alors

$$\Delta(2^p x_n) = \Delta \left(N + \frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right) = \left| -\frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right|$$

et

$$\Delta(2^p y_n) = \Delta \left(N' + \frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \right) = \left| -\frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^n \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \right|.$$

D'où

$$\Delta(2^p y_n) - \Delta(2^p x_n) = \frac{-1}{2^{n-p}}.$$

Donc dans tous les cas

$$\Delta(2^p y_n) - \Delta(2^p x_n) = \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^{n-p}}.$$

On en déduit que

$$f(y_n) - f(x_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\Delta(2^p y_n)}{2^p} - \frac{\Delta(2^p x_n)}{2^p} \right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^n}.$$

Donc

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}} \text{ diverge lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On suppose que f est dérivable en x .

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en x , d'après la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} f(x_n) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(x) + f'(x)(x_n - x) + o(x_n - x) \\ f(y_n) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(x) + f'(x)(y_n - x) + o(y_n - x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f'(x)(y_n - x) + o(y_n - x) - f'(x)(x_n - x) - o(x_n - x)}{y_n - x_n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f'(x)2^{-n} + o(2^{-n})}{2^{-n}} \text{ car } |y_n - x| \leq 2^{-n} \text{ et } |x_n - x| \leq 2^{-n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} f'(x) + o(1). \end{aligned}$$

Contradiction avec la divergence de cette suite.

Donc f n'est pas dérivable en x . □