Différentielle du déterminant

Proposition — $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\; D\det_X[H] = \mathit{Tr}\left({}^t\mathit{Com}\,(X)\,H\right)$.

DÉMONSTRATION
Comme $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de calculer ses dérivées partielles selon un vecteur quelconque pour connaître sa différentielle.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $t \in \mathbb{R}$.
On note $\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ les valeurs propres de H.
$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + o(t) = \det(I_n) + t\cdot \mathrm{Tr}\,(H) + o(t)$.
D'où $\dfrac{\partial \det}{\partial H}(I_n) = \mathrm{Tr}\,(H)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\; D\mathrm{det}_{I_n}[H] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)\,h_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}\,(E_{i,j})\;h_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \mathrm{Tr}\,(H)
\end{aligned}$$

Soit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\det(X+H) &= \det(X)\det(I_n + X^{-1}H)\\
&= \det(X)\left[\,\det(I_n) + D\mathrm{det}_{I_n}(X^{-1}H) + o\left(|||H|||\right)\,\right]\\
&= \det(X)\left[1 + \mathrm{Tr}\left(X^{-1}H\right) + o\left(|||H|||\right)\,\right]\\
&= \det(X) + \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}\,(X)\,H\right) + o\left(|||H|||\right)
\end{aligned}$$

Donc $D\det_X[H] = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}\,(X)\,H\right)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
X est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que

$$X = PDP^{-1}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$X_k = P\left(D + \frac{1}{k} I_n\right) P^{-1}.$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \det(X_k) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda_i + \frac{1}{k}\right) \neq 0$ à partir d'un certain $k_0 \in \mathbb{N}^*$.

Or $\forall k \geqslant k_0,\ |||X_k - X||| \leqslant |||P||| \cdot \frac{1}{k} \cdot |||P^{-1}||| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Donc $(X_k)_{k \geqslant k_0}$ est une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ convergeant vers X.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\forall X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ D\mathrm{det}_X[H] = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(X)\, H\right)$ et $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par continuité de la trace et de la comatrice, on peut prolonger la formule sur tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\square$