Convergence de A^k

Proposition — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
La suite $(A^k x)_{k \in \mathbb{N}}$ converge (géométriquement de rapport $\rho(A)$) pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

DÉMONSTRATION (PROPOSITION)

$\Longrightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
Il existe un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ associé à λ.
Comme

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|A^k x\right\| = |\lambda|^k \cdot \|x\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$|\lambda| < 1.$$

D'où

$$\rho(A) < 1.$$

$\Longleftarrow$ Par décomposition de Dunford, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, D diagonale et N nilpotente telles que

$$A = P(D+N)P^{-1} \text{ avec } DN = ND.$$

Comme N et D commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

Soit $k \geqslant 2n$.

$$\left\|\left|A^k\right|\right\| = \left\|\left|P(D+N)^k P^{-1}\right|\right\|$$

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|(D+N)^k\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\|$$

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\|$$

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\| \cdot \left\|\left|D^{k-n} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{k}{i} D^{n-i} N^i\right|\right\|$$

car N est nilpotente

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{k}{i} \left\|\left|D\right|\right\|^{n-i} \left\|\left|N\right|\right\|^{i}\right) \cdot \left\|\left|D\right|\right\|^{k-n}$$

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{k}{n} \left\|\left|D\right|\right\|^{n-i} \left\|\left|N\right|\right\|^{i}\right) \cdot \left\|\left|D\right|\right\|^{k-n}$$

car le maximum de $\binom{k}{i}$ est atteint en $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geqslant n > i$

$$\leqslant \left\|\left|P\right|\right\| \cdot \left\|\left|P^{-1}\right|\right\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{k^{n-1}}{n!} \left\|\left|D\right|\right\|^{n-i} \left\|\left|N\right|\right\|^{i}\right) \cdot \left\|\left|D\right|\right\|^{k-n}$$

$$\leqslant C \cdot k^n \cdot \left\|\left|D\right|\right\|^{k}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Si on choisit pour norme matricielle la norme opérateur associée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_\infty$ alors

$$\left\|\left|D\right|\right\|_\infty = \rho(D) = \rho(A) < 1.$$

En effet, d'après la démonstration de la décomposition de Dunford, A et D ont les mêmes valeurs propres.

D'où

$$\forall k \geqslant 2n,\ \left\|\left|A^k\right|\right\|_\infty \leqslant C \cdot k^n \cdot \rho(A)^k$$

Donc
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left\|\left|A^k\right|\right\|_\infty \leqslant C \cdot \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^k.$$
D'après **El Amrani** *Suites et séries vectorielles, suites et séries de fonctions* pp 40-41, cela signifie que la convergence est géométrique de rapport $\rho(A)$.

□

Proposition — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $b \in \mathbb{C}^n$.*
Toute suite de la forme $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = Ax_k + b$ avec $x_0 \in \mathbb{C}^n$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

DÉMONSTRATION
On peut facilement montrer par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = A^k x_0 + \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) b.$$

$\Longrightarrow$ Dans le cas $x_0 = 0$, ça donne $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) b.$

La convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors équivalente avec la convergence de la série.
Comme la série ne diverge pas grossièrement, on a $\lim\limits_{j\to+\infty} A^j = 0$.
D'après la proposition précédente, ça implique $\rho(A) < 1$.

$\Longleftarrow$ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$.
D'après la proposition précédente, il existe $C > 0$ tel que
$$\forall j \in \mathbb{N},\ \left\|\left|A^j\right|\right\| \leqslant C \cdot (\rho(A) + \varepsilon)^j.$$

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet, par convergence absolue de la série, la série converge.
De plus, la suite $(A^k x_0)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$.
Donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$.

□