

Formule de Stirling

Stirling
(1)
V.1

Leçons: 223, 236

Ref.: Gourdon, Analyse p 219 et p 130 (3^e édition)

Proposition: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

⚠ Coquille dans le Gourdon: $u_n \rightarrow \frac{1}{k}$ pour que $n! \sim k \dots$

1) Intégrales de Wallis

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$

On a alors $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \geq 2. \quad I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x \times \sin^{n-1} x \, dx \\ &= \left[-\cos x \times \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \times ((n-1) \cos x \times \sin^{n-2} x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \times \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$\text{donc } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Soit $p \geq 1$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times I_{2p-2}$$

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots \times 1}{2p(2p-2) \dots \times 2} \times I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p-1) \dots \times 1}{2p \dots \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$p \geq 2$

$$I_{2p-1} = \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3}$$

$$I_{2p-1} = \frac{(2p-2)(2p-4) \dots \times 2}{(2p-1)(2p-3) \dots \times 1} I_1$$

$$I_{2p-1} = \frac{1}{2p} \times \frac{2p(2p-2) \dots \times 2}{(2p-1) \dots \times 1}$$

Pour $p \geq 2$, $\sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x \leq \sin^{2p-2} x$
 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $0 < I_{2p} \leq I_{2p-1} \leq I_{2p-2}$

donc $1 \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} \leq \frac{2p}{2p-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$

donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = 1$

Donc $\frac{1}{2p} \times \left[\frac{2p(2p-2) \dots 2}{(2p-2)(2p-4) \dots 2} \right] \times \frac{2}{\pi} \rightarrow 1$

d'où $\frac{1}{\sqrt{p}} \times \frac{2p \dots 2}{(2p-1) \dots 1} \rightarrow \sqrt{\pi} \quad (*)$

Rq: Si on veut finir Wallis

$\frac{2p \dots 2}{(2p-1) \dots 1} \sim \sqrt{\pi p}$ donc $I_{2p-1} \sim I_{2p} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

2) Formule de Stirling

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$

et $v_n = \log \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ($\log u_1 = 0$)

o/ Il y a $\sum v_n$, donc $(u_n)_n$ converge

$|v_n| = \left| \log \left(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} \times (n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \right) \right|$

$= \left| \log \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-1} \times \frac{n+1}{n+1} \right) \right|$

$\triangle$ Mettre les modules (voir remarques)

$= \left| -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right|$

$= \left| -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right|$

$= \left| -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$

done $|v_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

done $\sum_n |v_n| < \infty$ done $\sum v_n < \infty$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

On $v_{k+1} + v_n = \log u_n - \log u_1 = \log u_n$

done $\log u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ et on pose $\frac{1}{k} = e^{\lambda}$,

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}$

done $n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n}$ (*)

b° Déterminer k

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n(2n-2)\dots \times 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}$

D'après (*), $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi}$

En multipliant α_n par $\frac{\text{numérateur}}{\text{numérateur}}$, on a

$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}$

et d'ap. (*)

$(n!)^2 \sim k^2 n \times n^{2n} e^{-2n}$ donc $2^{2n} (n!)^2 \sim k^2 n 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}$

$(2n)! \sim k \times \sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{-2n}$

done $\sqrt{n} (2n)! \sim \sqrt{2} k \times n \times 2^{2n} \times n^{2n} e^{-2n}$

done $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{2}}$

Par unicité de la limite, on a donc $k = \sqrt{2\pi}$

d'où $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$