VH
11/06/15
1

Théorème de Pascal (déterminants) 152, 180

Réf : Kloeckner

On appelle hexagone une famille de six points distincts dont trois ne sont jamais alignés. On dit qu'il est inscrit dans une conique $\mathcal{C}$ si tous ses points appartiennent à $\mathcal{C}$.

Théorème (Pascal)

Un hexagone $(a\,b\,c\,d\,e\,f)$ est inscrit dans une conique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^2(K)$ ssi les points $(ab)\cap(de)$, $(bc)\cap(ef)$, $(cd)\cap(fa)$ sont alignés. Dans ce cas, la conique est propre.

dém : Tout d'abord, remarquons que si une conique passe par ces 6 points, 3 d'entre eux n'étant jamais alignés, elle est propre.

De plus, tout quadruplet parmi ces 6 points forme un repère projectif, car 3 d'entre eux ne sont jamais alignés.

Plaçons-nous dans le repère (a, c, e, b). On munit tout point $M \in \mathbb{P}^2(K)$ de coordonnées homogènes $[x:y:z]$ relatives au repère (a, c, e, b).

On rappelle que $a \rightsquigarrow [1:0:0]$ $\quad e \rightsquigarrow [0:0:1]$

$c \rightsquigarrow [0:1:0]$ $\quad b \rightsquigarrow [1:1:1]$

On note respectivement $[r:s:t]$ et $[u:v:w]$ les coordonnées homogènes respectives de d et de f.

· Droite (ab) : cette droite a pour équation $y = z$, puisque cette équation définit une droite et est vérifiée par a et b.

On fait de même avec les cinq autres droites.

Droite	Equation de la droite	Point d'intersection
(ab)	$y=z$	$[r:s:s]$
(de)	$sx=ry$	
(bc)	$x=z$	$[u:v:u]$
(ef)	$vx=uy$	
(cd)	$tx=rz$	$[rw:tv:tw]$
(fa)	$wy=vz$	

Ces trois points sont alignés dans $\mathbb{P}^2(K)$ ssi le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} r & u & rw \\ s & v & tv \\ s & u & tw \end{vmatrix} \text{ est nul.}$$

(i.e ssi les trois droites de K^3 correspondantes sont coplanaires).

· D'autre part, soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \xi yz = 0$ une équation de la conique $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ contient a, c et e alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\mathcal{C}$ contient de plus b, d et f ssi

$$(*) \quad \begin{cases} \delta + \varepsilon + \xi = 0 \\ \delta rs + \varepsilon rt + \xi st = 0 \\ \delta uv + \varepsilon uw + \xi vw = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'hexagone $(abcdef)$ est inscrit dans $\mathcal{C}$ ssi le système $(*)$ a une solution non triviale, i.e ssi

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ rs & rt & st \\ uv & uw & vw \end{vmatrix} = 0.$$

Or $D_1 = D_2$, ce qui conclut le théorème de Pascal.

En effet $D_1 = suwt \begin{vmatrix} \frac{r}{s} & 1 & \frac{r}{t} \\ 1 & \frac{v}{u} & \frac{v}{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rstuvw \begin{vmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{r} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{v} & \frac{1}{u} & \frac{1}{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$D_2 = rstuvw \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/t & 1/s & 1/r \\ 1/w & 1/v & 1/u \end{vmatrix} = D_1.$$

VH
11/06/15
2

Manière plus élégante de mener les calculs de déterminants :

équation de la conique : $\delta xz + \varepsilon yz + \xi xy = 0$

en α, β, γ : $\delta rt + \varepsilon st + \xi rs = 0$

$\vdots$

$\delta + \varepsilon + \xi = 0$

$$D_2 = \begin{vmatrix} rt & st & rs \\ uw & vw & uv \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} r & u & rw \\ s & v & tv \\ s & u & tw \end{vmatrix} \overset{\text{Colonnes}}{=} suwt \begin{vmatrix} r/s & 1 & r/t \\ 1 & v/u & v/w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Lignes}}{=} \begin{vmatrix} rt & st & rs \\ uw & vw & vu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_2 .$$