

Etude de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$

Leçons : 228, 236, 239, 253, 265

Réf. : Zwiller - Queffelec, Analyse pour l'agregation p312 (4^e édition)
(en partie...)

Prop. :

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On va montrer que :

1) Γ est bien définie

2) Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, et $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$

3) Γ et $\ln \Gamma$ sont convexes

4) Tableau de variations de Γ

5) $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \geq 1$

6) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$ (formule d'Euler - Gauss)

1) Soit $x > 0$. $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$

$t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable en 0 car $x-1 > -1$ et les fonctions sont positives donc $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable en 0

$t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

donc Γ est bien définie

2) Application du théorème de dérivation des intégrales à paramètre

Soit $g :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln t} e^{-t}$$

On a alors pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$

• $\forall x > 0$, $t \mapsto g(x, t)$ est mesurable comme produit de fonctions continues, et on a vu au 1) que $\int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ est bien définie

• $\forall t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = (\ln t) \cdot t^{x-1} e^{-t}$$

• Soient $0 < a < b$

$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln t| t^{a-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{t} + |\ln t| t^{b-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{t} \quad \text{sur }]0, 1] \text{ et } [1, +\infty[$$

$$\text{et : } |\ln t| t^{b-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ en } +\infty \quad (\text{domination})$$

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0, |\ln t| = o\left(\frac{1}{t^\varepsilon}\right) \text{ en } 0$$

$$\text{donc pour } \varepsilon = \frac{a}{2}, |\ln t| t^{a-1} e^{-t} = o\left(t^{\frac{a}{2}-1} e^{-t}\right) \text{ en } 0$$

intégrable en 0 d'après 1)

Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est dérivable sur tout compact de $]0, +\infty[$, donc

$$\Gamma \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ de dérivée } \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

De plus, $\forall t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc

par théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\Gamma \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$

Enfin, en remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$,

avec une domination similaire on en déduit que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$

3) $\forall x > 0, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$

et $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est ≥ 0 et continue, donc $\Gamma''(x) > 0$

donc Γ est (strictement) convexe

De même, $\Gamma > 0$ donc $\ln \Gamma$ est bien définie
et $(\ln \Gamma)'' = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)' = \frac{\Gamma'' \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} > 0$

On, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\ln t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}}_{\in L^2([0, +\infty[)} \times \underbrace{t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}}_{\in L^2([0, +\infty[)} dt$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$\forall x > 0, \Gamma'(x) \leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{1/2} \times \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{1/2}$

donc $|\Gamma'(x)|^2 \leq \Gamma''(x) \Gamma(x)$

d'où $(\ln \Gamma)'' \geq 0$ donc $\ln \Gamma$ est convexe

4) $\forall x > 0, \Gamma(x) \geq \int_0^2 t^{x-1} e^{-t} dt \geq e^{-2} \int_0^2 t^{x-1} dt$

donc $\Gamma(x) \geq e^{-2} \times \frac{2^x}{x}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$

Γ étant convexe, on en déduit le tableau de variations suivant

x	0	x	$+\infty$
Γ	$+\infty$	$\searrow \Gamma(x) \nearrow$	$+\infty$

où $\Gamma(x) > 0$

5) Soit $x > 0$. Par intégration par parties, on a

$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$

donc $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

De plus, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

donc : $\forall n \geq 1, \Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$

b) a°/ Soit $x > 0$. On pose $f_n(t) = 1_{[0, n[} \cdot t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$
et $I_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

$\forall q, I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$

$\forall t \in \mathbb{R}, \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t}$ donc $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x, t)$

$\forall 0 \leq u \leq 1, 1-u \leq e^{-u}$

donc : $\forall t \in]0, n[, |f_n(t)| \leq 1_{[0, n[}(t) t^{x-1} \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n dt$

$|f_n(t)| \leq g(x, t)$ domination

donc par théorème de convergence dominée, $I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x) \quad \forall x > 0$

b°/ Calcul de $I_n(x)$

$\psi:]0, 1[\rightarrow]0, n[$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme tel que $\psi'(s) = n$
 $s \mapsto t = ns$

donc $I_n(x) = \int_0^1 n^{x-1} s^{x-1} (1-s)^n \cdot n ds = n^x \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^n ds$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(H_n) : I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Prouver (H_n) par récurrence.

$n=0$: $I_0 = 0$ donc H_0 est vérifiée.

$n \in \mathbb{N}$. OSP (H_n) vérifiée, m.g. (H_{n+1}) est vérifiée

$I_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{n+1} ds$

$= (n+1)^x \left(\left[\frac{s^x (1-s)^{n+1}}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 s^x \cdot (n+1) (1-s)^n ds \right)$

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \frac{(n+1)^x x(n+1)}{x} \times \frac{I_n(n+1)}{n^{(x+1)}} \quad \downarrow \text{H.R.} \\ &= \frac{(n+1)^x x(n+1)}{x} \times \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n+1)} \end{aligned}$$

$$I_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^x (n+1)!}{x(x+1) \dots (x+n+1)} \quad \text{ce qui conduit à la récurrence}$$

On a bien: $\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$