

Théorème de Fourier-Plancherel

Leçons: 201, 207, 208, 234, 235, 250

Réf.: Rudin, Analyse réelle et complexe p 225 (3^e édition)

Notations: $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f) =$ transformée de Fourier, $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$
 $Z_a f(x) = f(x-a)$

Th. (Fourier-Plancherel)

Pour tout $f \in L^2$, on peut associer $\hat{f} \in L^2$ telle que:

a) si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

b) $\forall f \in L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

c) $f \in L^2 \mapsto \hat{f} \in L^2$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert

d) si $f \in L^2$, $A > 0$ on pose $\Phi_A(t) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ixt} dm(x)$ $\Psi_A(t) = \int_{-A}^A \hat{f}(t) e^{ixt} dm(x)$

Alors $\|\hat{f} - \Psi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

et $\|f - \Phi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Rappels du plan:

• pour $x \in \mathbb{R}$, $\Psi: x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ est ≥ 0 et $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dm(x) = 1$

Par conséquent, $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n}{1+n^2 x^2}$ est une approximation de l'unité. On utilisera sa version "continue":

en posant $\lambda = \frac{1}{n} > 0$, $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$

• si $H(t) = e^{-|t|}$, alors $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt} dm(t)$

et $\forall f \in L^1$, $h_\lambda * f(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t)$ (Fubini)

• $0 < H(t) \leq 1$ et $(H(\lambda t))_\lambda$ est une suite c lorsque $\lambda \rightarrow 0$
 et $H(\lambda t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 1$

1) Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On a $\hat{f} \in L^2$ et que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

On définit $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$

Rq: on veut m.q. : $g \in L^1$, $g \in L^\infty$ et $g \in \mathcal{C}^0$

• $f, \tilde{f} \in L^1$ donc $g \in L^1$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \tilde{f}(y) dm(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y+x) \tilde{f}(y) dm(y)$$

$$\text{donc } g(x) = \langle \tau_x f, \tilde{f} \rangle$$

$\mathbb{R} \rightarrow L^2$
 $x \mapsto \tau_x f$ est continue si $f \in L^2$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue sur L^2

donc g est continue

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq \|\tau_x f\|_2 \|f\|_2 \text{ par Cauchy-Schwarz}$$
$$|g(x)| \leq \|f\|_2^2 \quad \swarrow \text{invariance de la mesure de Lebesgue par translation}$$

$$\text{donc } \|g\|_\infty \leq \|f\|_2^2 \text{ donc } g \in L^\infty$$

$$g \in L^\infty \text{ et } g \text{ est continue en } 0 \text{ donc } \underline{h_\lambda * g(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} g(0) = \|f\|_2^2}$$

$$\text{On, } h_\lambda * g(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) e^{ixt} dm(t)$$

$$\text{et } \hat{g}(t) = \hat{f}(t) \hat{\tilde{f}}(t) = \hat{f}(t) \overline{\hat{f}(t)} = |\hat{f}(t)|^2$$

$$\text{donc } \underline{h_\lambda * g(0) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2 dm(t)}$$

la suite de fonctions $(H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2)_\lambda$ est ≥ 0 , $\nearrow$ (car $\lambda \rightarrow 0$)

$$\text{et } H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} |\hat{f}(t)|^2$$

$$\text{donc par TCM, } \underline{h_\lambda * g(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dm(t)}$$

$$\text{Donc, } \underline{\hat{f} \in L^2 \text{ et } \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2}$$

2) Soit $Y = \{f, f \in L^1 \cap L^2\}$. $\Pi_q \bar{Y} = L^2$

Cela équivaut à m.g. $Y^\perp = \{0\}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ on pose $g_{\alpha, \lambda}(x) = e^{i\alpha x} H(\lambda x)$.

Alors $g_{\alpha, \lambda} \in L^1 \cap L^2$

$$\hat{g}_{\alpha, \lambda}(t) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda x) e^{i(\alpha-t)x} dx = h_\lambda(\alpha-t)$$

Soit $w \in Y^\perp$

$$\langle \bar{g}_{\alpha, \lambda}, w \rangle = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha-t) \bar{w}(t) dt = |h_\lambda * \bar{w}(\alpha)| = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Or, $\bar{w} \in L^2$ donc $\|\bar{w} - h_\lambda * \bar{w}\|_2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$

donc $\|\bar{w}\|_2 = 0 = \|w\|_2$ donc $w = 0$ (dans L^2)

donc Y est dense dans L^2

3) Prolonger $F: L^1 \cap L^2 \rightarrow Y$ à $F: L^2 \rightarrow L^2$

soit $\Pi_q L^1 \cap L^2$ est dense dans $(L^2, \|\cdot\|_2)$

Soit $f \in L^2$. On pose $k_A f = f \cdot \chi_{[-A, A]}$ où $A > 0$

Alors: $\int_{\mathbb{R}} |k_A f|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx = \|f\|_2^2$ car donc $k_A f \in L^2$

$$\int_{\mathbb{R}} |k_A f(x)| dx \leq \|f\|_2 \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \text{ (car Cauchy-Schwarz)}$$

donc $k_A f \in L^1$ donc $k_A f \in L^1 \cap L^2$

et: $k_A f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} f$ simplement

$$\|f - k_A f\|_2^2 = \left\| f \cdot \chi_{[-A, A]^c} \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \text{ domination}$$

donc par TCD $\left(\int_{\mathbb{R}} |f - k_A f|^2 dx \right)^{1/2} = \|f - k_A f\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

donc $L^1 \cap L^2$ est dense dans $L^2, \|\cdot\|_2$

b° Prolongement de $\mathcal{F}$

Soit $f \in L^2$, $\exists (f_n)_n$ suite de $L^1 \cap L^2$ tq $\|f - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors, $(f_n)_n$ est de Cauchy

et $\|\mathcal{F}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$ donc $(\mathcal{F}(f_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{Y} \subset L^2$

$(L^2, \|\cdot\|_2)$ est complet, donc $\exists \tilde{\mathcal{F}}(f) \in \overline{\mathcal{Y}} = L^2$ tq $\|\tilde{\mathcal{F}}(f) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \|f\|_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(f_n)\|_2 \end{aligned}$$

$$\|f\|_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2$$

On remarque pour $f \in L^2$ $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

4) Montrer que $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ est un isomorphisme

- linéarité: c'est clair par linéarité de $\mathcal{F}$ sur $L^1 \cap L^2$.
- injectivité: $\mathcal{F}$ est une isométrie donc $\mathcal{F}$ est injective.
- surjectivité:

Soit $H = \mathcal{F}(L^2)$

a°/ $\Pi_q H$ est fermé dans L^2

Soit $(\tilde{f}_n)_n$ suite de H tq $\tilde{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g \in L^2$

Alors $(\tilde{f}_n)_n$ de Cauchy

donc comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, $(f_n)_n$ de Cauchy dans L^2

donc $\exists f \in L^2$ / $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^2

et $\mathcal{F}$ isométrie donc $\mathcal{F}$ est continue donc $\tilde{f}_n = \mathcal{F}(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f) = g$
dans $g \in H$ donc H fermé dans L^2

b°/ Πg . $H^\perp = \{0\}$ (et donc $\overline{H} = H = L^2$)

Soit $g \in H^\perp \subset L^2$.

Comme $\overline{Y} = L^2$, $\exists (\hat{f}_n)_n$ de Y tq $\hat{f}_n \rightarrow g$ dans L^2

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle \hat{f}_n, g \rangle = 0$
 donc par continuité de $\langle, \rangle$, $\|g\|_2^2 = 0$ $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$
 donc $g = 0$.

donc $\mathcal{F}(L^2) = L^2$ donc $\mathcal{F}$ est surjective.

$\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ est un isomorphisme.

5) Montrer le d) du théorème

• $\Psi_A = \widehat{k_A f}$

donc $\|\hat{f} - \Psi_A\|_2 = \|\hat{f} - \widehat{k_A f}\|_2 = \|f - k_A\|_2$

donc $\|\hat{f} - \Psi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

• $\Psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} k_A \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t)$

On $k_A \hat{f} = k_A \mathcal{F}(f) \in L^1$ donc par inversion de la transformation de Fourier sur L^1 , $\Psi_A = \mathcal{F}^{-1}(k_A \mathcal{F}(f))$

D'où $\|f - \Psi_A\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) - \mathcal{F}^{-1}(k_A \mathcal{F}(f))\|_2$
 $= \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) - k_A \mathcal{F}(f))\|_2$
 $= \|\hat{f} - k_A \hat{f}\|_2$

donc $\|f - \Psi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$