

Surjectivité de $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

exp 0
1
v1

Leçons: 204, 214, 156

Ref.: Zavidovique, Un max de maths p49

Rq: Version longue, choisis selon la leçon les parties sur lesquelles aller vite.

Exercice: On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) P. q. $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$

2) P. q. $\mathcal{A} = \{\text{éléments inversibles dans } \mathbb{C}[A]\}$ est égal à $\mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$,

puis que $\exp: (\mathbb{C}[A], +) \rightarrow (\mathcal{A}, \times)$ est un morphisme de groupes

3) P. q. $\mathcal{A}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[A]$

4) P. q. $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathcal{A}$

5) P. q. $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathcal{A}$, et conclure dans le cas $A \in GL_n(\mathbb{C})$

1) $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative, associative et unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en particulier un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dim. finie, donc $\mathbb{C}[A]$ est de dimension finie donc fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\exp(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!} \quad \text{donc } \exp(A) \in \mathbb{C}[A]$$

2) $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$: c'est clair

• Si $\pi \in GL_n(\mathbb{C})$, soit $\mu_\pi = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_0$ son polynôme minimal. Alors, $a_0 \neq 0$ sinon

$$\begin{aligned} \pi^k + \dots + a_1 \pi &= 0 \\ \pi(\pi^{k-1} + \dots + a_1 I_n) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \pi \in GL_n(\mathbb{C})$$

$\pi^{k-1} + \dots + a_1 I_n = 0$ donc π est annihilée par un poly. de $\deg < \deg \mu_\pi$.

(à finir)

On a donc $M^k + a_1 M + a_0 I_n = 0$

$$M^{-1} = -a_0^{-1} (M^{k-1} + \dots + a_1 I_n) \in \mathbb{C}[M].$$

Si $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$

donc $M \in \mathcal{A}$ donc $\mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{A}$.

On a bien $\mathcal{A} = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

• Morphisme de groupes:

On a $\exp: \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, donc d'après 1),

$$\exp: \mathbb{C}[A] \rightarrow \mathcal{A} = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}).$$

Soient $M, N \in \mathbb{C}[A]$. $\mathbb{C}[A]$ étant commutative, on a alors

$$\exp(M+N) = \exp(M) \exp(N)$$

donc $\exp: (\mathbb{C}[A], +) \rightarrow (\mathcal{A}, \times)$ est un morphisme de groupes.

3). Ouvert dans $\mathbb{C}[A]$

$GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc par continuité du déterminant, $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{A} = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ est donc ouvert dans $\mathbb{C}[A]$ (topo. induite)

• P.g. $\mathcal{A}$ est connexe par arcs

Soient $M, N \in \mathcal{A}$. On cherche un chemin continu de M vers N dans $\mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

a°/ Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\Psi(z) = zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A]$ et est continue.

De plus $z \mapsto \det(\Psi(z))$ est polynomiale en z , donc admet un ensemble de zéros D fini. et non identiquement nulle car $\det(\Psi(0)) = \det N \neq 0$

On cherche alors une applicat° $\Psi: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ qui évite tous les éléments H .

6°/ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\Psi_a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto t + iat(1-t)$$

Alors $\Psi_a(0) = 0$; $\Psi_a(1) = 1$ et Ψ_a est continue.

et $\mathbb{R} \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$

$(a, t) \mapsto \Psi_a(t)$ est injective

Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in]0, 1[$, $\Psi_a(t) \notin H$, et $\gamma = \Psi \circ \Psi_a$

Alors $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}[A]$, continue et $\gamma(0) = N$, $\gamma(1) = M$.

donc $\mathcal{A}$ est connexe par arcs, et donc $\mathcal{A}$ est connexe

4) a°/ Π . q. exp réalise un $\mathcal{C}^1$ difféo. local en $0 \in \mathbb{C}[A]$ vers $I_n \in \mathcal{A}$

• Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exp: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\exp(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H^n}{n!} = I_n + H + H^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H^n}{(n+2)!} \quad \text{converge}$$

$$\text{donc } \exp(H) = \exp(0) + H + o(H)$$

$$\text{donc } d\exp(0) = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

• La restriction exp: $\mathbb{C}[A] \xrightarrow{\subset \mathbb{C}[A]} \mathcal{A}$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$

$$0 \in \mathbb{C}[A] \text{ et } d\exp(0) = \text{Id}_{\mathbb{C}[A]} \in GL(\mathbb{C}[A])$$

donc par théorème d'inversion locale, il existe $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}[A]$ un voisinage ouvert de 0 et $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ un voisinage ouvert de $\exp(0) = I_n$ tels que $\exp: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$$\text{On a donc } \mathcal{V} \subset \exp(\mathbb{C}[A])$$

IRq: Ce n'est possible que parce que $\mathcal{A}$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$ (voir 3))

b°/ Π . q. exp($\mathbb{C}[A]$) est ouvert dans $\mathcal{A}$

On déplace $\mathcal{U}$ autour de tout élément de $\mathbb{C}[A]$

Soit $\Pi \in \mathbb{C}[A]$. (un exp morphisme, voir 2))

$$\exp(\Pi + \mathcal{U}) = \exp(\Pi) \exp(\mathcal{U}) = \exp(\Pi) \mathcal{V}$$

On, l'application $f: V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \exp(\pi) V$ est un homomorphisme car $\exp(\pi) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc une application ouverte.

Par conséquent, $f(\mathcal{V}) = \exp(\pi) \mathcal{V}$ est un ouvert de $\exp(\mathbb{C}[A])$ contenant $\exp(\pi)$ car $I_n \in \mathcal{V}$.

$\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathcal{A}$ est un voisinage de chacun de ses points, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathcal{A}$.

5) a°/ P. q. $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathcal{A}$

Soit $\pi \in \mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$.

Alors $\pi \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$

car si $\pi \exp(\mathbb{C}[A]) \cap \exp(\mathbb{C}[A]) \neq \emptyset$,

alors il existe $P, Q \in \mathbb{C}[A]$ tels que

$\pi \exp(P) = \exp(Q)$ donc $\pi = \exp(P-Q) \in \exp(\mathbb{C}[A])$ absurde

donc $\bigcup_{\pi \in \mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} \pi \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{\pi \in \dots} \{\pi\} \subset \bigcup_{\pi \in \dots} \pi \exp(\mathbb{C}[A])$

donc $\mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{\pi \in \mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} \pi \exp(\mathbb{C}[A])$

On, d'ap. 4) $\exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert dans $\mathcal{A}$, donc $\pi \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert dans $\mathcal{A}$

donc $\mathcal{A} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert dans $\mathcal{A}$, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathcal{A}$.

b°/ P. q. $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathcal{A}$

• $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathcal{A}$ et non vide car $I_n \in \exp(\mathbb{C}[A])$

• $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathcal{A}$ (4/) et fermé dans $\mathcal{A}$ (5/)

• $\mathcal{A}$ est connexe (3/)

donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathcal{A}$

c°/ Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $A \in \mathcal{A} = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$; donc

il existe $\pi \in \mathbb{C}[A]$ telle que $\exp(\pi) = A$. $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Remarques

exp C
③
V1

• Le 5)a% est très long à écrire, faire comme dans la référence et l'écrire rapidement. Éviter de mentionner la notion de groupe topologique si on n'est pas à l'aise.

• Leçon 204: (Connexité)

i) 2): admettre que π^{-1} est un polynôme en π

ii) 4)a% admettre que $d \exp(0) = \text{Id}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{C})}$

iii) faire proprement la connexité par arcs (3)a% en écrivant explicitement le chemin continu.

iv) 4)a% ne pas trop détailler l'utilisation du TIL, mais bien avoir en tête qu'on étudie la restriction de $\exp$ à $\mathbb{C}[A]$ qui est a priori de dimension inférieure à n , donc l'image doit être ^{dans} un $\mathbb{C}^r$ de même dimension pour avoir un $\mathbb{C}^1$ -difféomorphisme (l'image est $A \subset \mathbb{C}[A]$).

• Leçon 214: (TIL, TFI)

i) idem 204

ii) aller vite sur 3): une fois qu'on a m.q. D est fini, donc qu'on peut alors trouver un chemin continu qui évite les racines.

iii) 4) est la partie la plus importante, bien insister sur pourquoi on a montré que A était ouvert (et pas seulement connexe).

• Leçon 156: (Exponentielle matricielle)

i) faire 2): $\pi^{-1} \in \mathbb{C}[\pi]$

ii) 3): idem 214

iii) comme pour 204, ne pas s'éterniser sur le TIL, dire à l'oral qu'on utilise le th. de CUV sur tout compact des différentielles de $\pi \mapsto \pi^k$ pour m.q. $\exp$ est $\mathbb{C}^1$ (et m. $\mathbb{C}^\infty$).

Questions:

(serait donc que $\exp(\mathcal{L}(\mathcal{A})) = \{M^t, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$)

Ser 1)

• $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(\mathcal{A})$? $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}[M]$? n^2 et $\deg(\mu_M)$

• pg un scv d'un cv de dim. finie est aussi de dim. finie?

Th. de la base incomplète ([Ber] p41) appliqué au scv, qui est "au plus" une base de l'cv

Ser 2)

• pg $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent? Contre-exemple?

La famille $\left(\frac{M^p}{p!}, \frac{N^q}{q!}\right)_{p,q}$ est sommable (à faire proprement)

$$\begin{aligned} \text{donc } \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M^p}{p!}\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{N^q}{q!}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^n \frac{M^h}{h!} \frac{N^{n-h}}{(n-h)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} M^h N^{n-h}\right) \\ \exp(M)\exp(N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(M+N)^n}{n!} \quad \text{binôme car } M \text{ et } N \text{ commutent} \end{aligned}$$

Contre-exemple: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M+N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \exp(N) = I_2 + N + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, (M+N)^n &= A^n = A \quad \text{donc } \exp(M+N) = \dots = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } \exp(M)\exp(N) &= \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \searrow \quad I_2 + \begin{pmatrix} e-1 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ser 4)

• pg $\exp$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$: $e_k: M \mapsto M^k$, puis on m.q. e_k est différentiable et que $\sum \frac{de_k}{k!}$ cvu sur tout compact de $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$

(ou)

Montrer à la main la différentiabilité ($\exp(M+N) - \exp(M)$), puis m.q. pour tout $H \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto d\exp(M)(H)$ est continue (sur compacts) pour avoir $\mathcal{C}^1$.