29/03/15

Solution fondamentale de l'équation des ondes

On note $d\sigma_R$ la mesure uniforme sur la sphère de centre O et de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.

Réf : Zuily
222, 240, 254, 255

Théorème : La distribution E définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+), \quad \langle E, \varphi \rangle = \int_{t=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi t} \varphi(x,t)\, d\sigma_t(x)\, dt$$

appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ et vérifie $\square E = \delta_0$, où $\square = \partial^2_{tt} - \Delta_x$.

dém : On note $\tilde{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier en espace.

$$\tilde{\mathcal{F}}(\square E) = \partial^2_{tt} \tilde{\mathcal{F}} E + |\xi|^2 \tilde{\mathcal{F}} E$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \tilde{\mathcal{F}} \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\mathcal{F}} \varphi \rangle = \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x,t)\, dx \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=0}}$$

$$= \int \varphi(x,0)\, dx$$

donc $\tilde{\mathcal{F}} \delta_0 = \delta_{t=0} \otimes \mathbb{1}$

Ainsi, E est solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ de $\square E = \delta_0$ si et seulement si $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{F}} E$ vérifie $\partial^2_{tt} \tilde{E} + |\xi|^2 \tilde{E} = \delta_{t=0} \otimes \mathbb{1}$ $(*)$.

On cherche $\tilde{E}$ sous la forme

$$\tilde{E}(\xi, t) = H(t) \left(a(\xi) \cos(t|\xi|) + b(\xi) \sin(t|\xi|) \right)$$

où $H : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Alors $\partial_t \tilde{E} = \delta_{t=0} \otimes a(\xi) + H(t) \left(-|\xi| a(\xi) \sin(t|\xi|) + |\xi| b(\xi) \cos(|\xi| t) \right)$

et $\partial^2_{tt} \tilde{E} = \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} \otimes |\xi| b(\xi) - |\xi|^2 \tilde{E}$

Ainsi, on choisit $a(\xi) \equiv 0$ et $b(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$:

on pose $\tilde{E}(\xi, t) = H(t) \dfrac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$.

$\tilde{E}$ est mesurable et $\tilde{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$.

$$\langle \tilde{E}, \varphi \rangle = \int_{t=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \varphi(\xi, t)\, d\xi\, dt$$

$$|\langle \tilde{E}, \varphi \rangle| \leq \underbrace{\left(\int_{t=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{t\, d\xi\, dt}{(1 + t^2 + |\xi|^2)^{n+1}} \right)}_{\text{constante finie}} \sup_{(t,\xi)} \left(1 + t^2 + |\xi|^2\right)^{n+1} |\varphi(\xi, t)|$$

$\hookrightarrow \boxed{n = 3}$

De plus, $\tilde{\hat{E}}$ vérifie $(*)$, donc $E = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\hat{E}$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ et vérifie $\square E = \delta_{t=0}$.

D'autre part, la mesure $d\sigma_R$ est à support compact dans $\mathbb{R}^3$, donc $\tilde{\mathcal{F}}(d\sigma_R)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Plus précisément, $\tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{d\sigma_R}{4\pi R^2}\right)(\xi) = \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}$ (dém à la fin)

Ainsi, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\langle E, \varphi\rangle = \langle \hat{E}, \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\varphi\rangle$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi,t)\,d\xi\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\langle \tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{d\sigma_t}{4\pi t}\right), \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\cdot,t)\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{d\sigma_t}{4\pi t}, \varphi(\cdot,t)\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi t}\int_{|x|=t} \varphi(x,t)\,d\sigma_t(x)\,dt.$$

Rem : E est à support sur le cône $\{|x| = t\}$. C'est caractéristique de la dimension 3.

· dém de la formule $\tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{d\sigma_R}{4\pi R^2}\right)(\xi) = \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}$.

$d\sigma_R$ est invariante par rotation, donc $\tilde{\mathcal{F}}(d\sigma_R)$ aussi :

$\forall A$ orthogonale, $\tilde{\mathcal{F}}(d\sigma_R)(A\xi) = \langle d\sigma_R, e^{-i(A\xi)\cdot x}\rangle$

$= \langle d\sigma_R, e^{-i\xi\cdot x}\rangle$

$$\tilde{\mathcal{F}}(d\sigma_R)(\xi) = \tilde{\mathcal{F}}(d\sigma_R)(0,0,|\xi|) = \int_{|x|=R} e^{-i|\xi|x_3}\,d\sigma_R(x)$$

chgt de variables sphériques : $x_1 = R\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = R\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = R\cos\theta$, $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} e^{-i|\xi|R\cos\theta}R^2\sin\theta\,d\theta$$

$t = -\cos\theta$

$$= 2\pi R^2\int_{-1}^{1} e^{+i|\xi|Rt}\,dt = 4\pi R^2\frac{\sin(|\xi|R)}{|\xi|R}.$$