

Générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$

Leçons: 106, 108, 160, 161

Réf.: Berkey, Algèbre : le grand combat p 102 (2^e édition)

E espace euclidien de dimension n

Th.: (générateurs de $O(E)$)

Soit $u \in O(E)$. On pose $\pi_u = \text{rg}(u - \text{id})$

i) u est la composée de π_u réflexions orthogonales

ii) si u est la composée de p réflexions orthogonales, alors $p \geq \pi_u$.

Th.: (générateurs de $SO(E)$)

Soit $u \in SO(E)$.

Si $n \geq 3$, alors u est la composée d'au plus n renversements.

Générateurs de $O(E)$

1) Démonstration de ii)

Soit $u \in O(E)$ telle que $u = \tau_{x_1} \dots \tau_{x_p}$ où τ_{x_i} est la réflexion ortho. d'hyperplan $(\text{Vect } x_i)^\perp$.

On pose $F_u = \text{Ker}(u - \text{id})$ (on a alors $\pi_u = n - \dim F_u$) et

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

On a alors $\dim F \leq p$ donc $\dim F^\perp \geq n - p$

Soit $x \in F^\perp$.

$\forall 1 \leq i \leq p$, $x \perp x_i$ donc $\tau_{x_i}(x) = x$ donc $u(x) = x$.

Par conséquent, $x \in F_u$

donc $F^\perp \subset F_u$

$n - p \leq \dim F^\perp \leq n - \pi_u$ donc $p \geq \pi_u$

2) Démonstration de i): on m.q. u est la composée d'au plus π_u réflexions orthogonales, donc d'après ii) d'exactement π_u réflexions orthogonales.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$, montrons par récurrence sur k la proposition
(H $_k$): $\forall u \in O(E)$ tq $\pi_u \leq k$, u est la composée d'au plus k réflexions orthogonales.

• $k=0$: $\pi_u = 0$ donc $u = \text{id}$ est la composée de 0 réflexions ortho.

• soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On suppose (H $_k$) vérifiée. $\forall q$ (H $_{k+1}$) est alors vérifiée.

a°/ réduction du problème

si $\pi_u \leq k$, on utilise l'H.R.

S'il existe z réflexion ortho. tq $\pi_{zu} < \pi_u - k + 1$

Alors par H.R., zu est la composée d'au plus π_{zu} réflexions ortho.

$$\text{Or, } z(zu) = z^2 u = u \quad (z^2 = \text{id})$$

donc u est la composée d'au plus $\pi_{zu} + 1 \leq \pi_u$ réflexions ortho.

On va en fait m.q. $\exists z$ tq $F_u \not\subseteq F_{zu}$

on aura alors $n - \pi_u < n - \pi_{zu}$

$$\text{donc } \pi_u > \pi_{zu}$$

b°/ construction de z (faire le dessin au fur et à mesure)

• $\dim F_u^\perp = \pi_u = k+1 \geq 1$ car $0 \leq k \leq n-1$, donc

$\exists x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$. On a alors $y = u(x) \neq x$.

Par conséquent, comme F_u est stable par u et u est une isométrie, $F_u^\perp$ est stable par u et $y \in F_u^\perp$

$$\text{donc } x - y \in F_u^\perp$$

Posons $z = z_{x-y}$

6. $\langle x-y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle u(x), u(x) \rangle = 0$
 $\nwarrow u \in \mathcal{O}(E)$
 donc $x+y \perp x-y$

• $\Pi_{F_u} F_u \subset F_{zu}$

Soit $z \in F_u$.

On a alors $u(z) = z$.

Or, $x-y \in F_u^\perp$ donc $z \perp x-y$

donc $zu(z) = z(u(z)) = z(z) = z$

donc $z \in F_{zu}$

donc $F_u \subset F_{zu}$

• Π_{F_u} l'inclusion est stricte

$x \in F_u^\perp$ donc $u(x) \neq x$ et $x \notin F_u$

$zu(x) = z(u(x)) =$

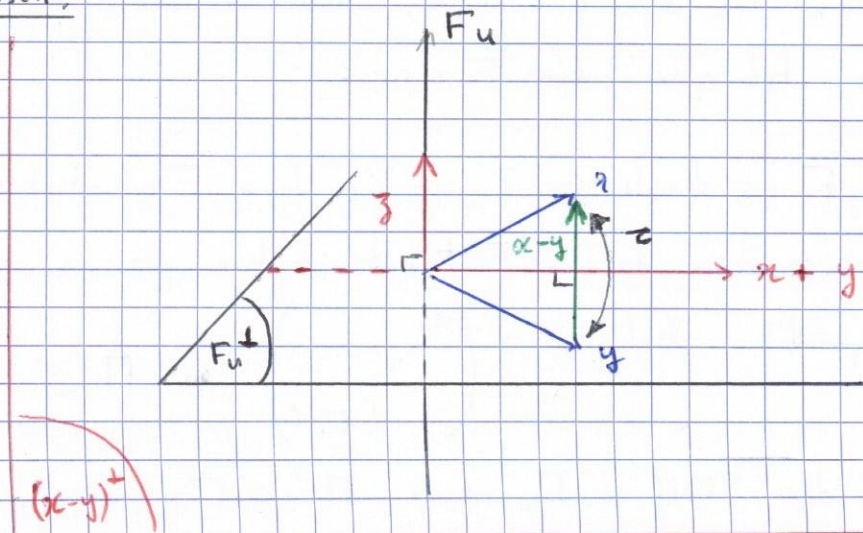
$= z(y)$

$= \frac{1}{2} z(x+y) - \frac{1}{2} z(x-y)$

$= \frac{1}{2} (x+y) - \frac{1}{2} (y-x)$

$zu(x) = x$ donc $x \in F_{zu}$ d'où $F_u \subsetneq F_{zu}$

Dessin:



$x-y \in F_u^\perp$

$F_u \subset (x-y)^\perp$

Générateurs de $SO(E)$

1) Remarque préliminaire

Soit $u \in SO(E)$.

$\det u = 1$ donc comme une réflexion ortho. est de déterminant -1 ,
d'après le théorème précédent, $u = Z_1 \dots Z_{2p}$ où $2p \leq n$.
Or si $u \neq \text{id}$ car id est la composée de 0 renversements.

2) Cas $n=3$

$2p \in \{0, 2\}$ et $u \neq \text{id}$, donc $u = Z_1 Z_2$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, Z_i est une réflexion ortho. de E de dimension 3, donc

$$\exists B_i \text{ bon de } E \text{ tq } \text{ob}_{B_i} Z_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{ob}_{B_i} (-Z_i) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } -Z_i \text{ est un renversement}$$

D'où $u = Z_1 Z_2 = (-Z_1)(-Z_2)$ est produit de 2 renversements

3) Cas $n > 3$

D'après 1), il suffit de mq si $u = Z_1 Z_2$, alors u s'écrit comme produit de 2 renversements

• Soit Z_1 (resp. Z_2) une réflexion ortho. d'hyperplan H_1 (resp. H_2).

Alors, $\dim H_1 \cap H_2 \in \{n-1, n-2\}$ donc il existe un sev

$F \subset H_1 \cap H_2$ tel que $\dim F = n-3$

• Soit $u = Z_1 Z_2$. F est stable par Z_1 et Z_2 donc F est stable par u ,
et u est une isométrie donc $F^\perp$ est stable par u .

$$\exists B \text{ bon de } E \text{ tq } \Pi = \text{ob}_B u = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \Pi' \end{pmatrix} \text{ où } \Pi' \in \text{ob}_3(\mathbb{R})$$

On, ${}^t \Pi \Pi = I_n$ donc ${}^t \Pi \Pi' = I_3$ donc $\Pi' \in O_3(\mathbb{R})$

$\det \Pi = 1$ donc $\det \Pi' = 1$ donc $\Pi' \in SO_3(\mathbb{R})$

(6)

- M est la matrice de $u|_{F^\perp}$ dans une base de $F^\perp$, donc d'après 2) il existe σ_1, σ_2 deux renversements de $F^\perp$ tels que $u|_{F^\perp} = \sigma_1 \sigma_2$.

- Enfin, en posant pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\forall (x, y) \in F \times F^\perp, \quad \sigma_i(x + y) = x + \sigma_i(y),$$

σ_i est un renversement de E et $u = \sigma_1 \sigma_2$

(à voir matriciellement)