Générateurs de $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$ + Application

Leçons : 108, 162

Réf. : Berhuy, Algèbre : le grand combat (2e éd.) p 79 [Br]

Caldero,... Nouvelles ... Tome 1 p 116 [NH2G2]

Zavidovique, Un max de maths p 49 [Za]

Th. : K corps, $n \in \mathbb{N}^*$

1) Toute matrice $M \in SL_n(K)$ est produit de matrices de transvections

2) ——— $M \in GL_n(K)$ ——— et d'au plus une matrice de dilatation

Coro :

1) $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes

2) $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Théorème : [Br]

1) $SL_n(K)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $M \in SL_n(K)$. Mq $\exists r, s \in \mathbb{N}$, $T_1 \dots T_r$, $T'_1 \dots T'_s$ matrices de transvection telles que $T_1 \dots T_r M T'_1 \dots T'_s = I_n$ (H_n)

. $n = 1$: rien à faire et (H_1) est vérifiée

. $n \in \mathbb{N}^*$. OSP (H_n) vérifiée, m.q. (H_{n+1}) est alors vérifiée.

Soit $M = (a_{ij}) \in SL_{n+1}(K)$.

a°/ Mq OPS $a_{11} \neq 0$

Si $a_{11} = 0$, comme $rg(M) = n$, $L_1 \neq 0$ donc $\exists 1 \leq j \leq n$ / $a_{1j} \neq 0$.

On fait alors : • $T_{j1}(1)$ $C_1 \leftarrow C_1 + C_j$

→ OPS $a_{11} \neq 0$

b°/ Π_q OPS $a_{11} = 1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \cdots \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Si $a_{21} = 0$, on fait : $T_{21}(1) \cdot$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$\Rightarrow$ OPS $a_{21} \neq 0$

puis on fait : $T_{12}\left(\frac{1 - a_{11}}{a_{21}}\right) \cdot$ $\qquad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1 - a_{11}}{a_{21}} L_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{OPS } a_{11} = 1}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & & \\ \times & & & \end{pmatrix}$

c°/ On fait alors

$$T_{n+1,1}(-a_{n+1,1}) \cdots T_{21}(-a_{21}) \, \Pi \, T_{12}(-a_{12}) \cdots T_{1\,n+1}(-a_{1\,n+1})$$

On obtient alors $\boxed{\Pi'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Pi' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}$ où $\Pi' \in SL_n(K)$

d°/ Par H.R., $\exists\, r, s \in \mathbb{N}$, $P_1 \dots P_r, P'_1 \dots P'_s \in \mathcal{M}_n(K)$ des matrices de transvection tq $P_1 \dots P_r \Pi' P'_1 \dots P'_s = I_n$.

On pose alors : $1 \leq i \leq r$ $\quad T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$ $\quad 1 \leq j \leq s$ $\quad T'_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_j \end{pmatrix}$

qui sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n+1}(K)$ telles que

$$\boxed{T_1 \dots T_r \Pi'' T'_1 \dots T'_s = I_{n+1}}$$

2) $GL_n(K)$

$$D_n(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

Soit $\Pi \in GL_n(K)$ et $\mu = \det \Pi$.

Alors $\Pi D_n(\mu^{-1}) \in SL_n(K)$ donc par le th. précédent, $\exists\, r \in \mathbb{N}^*$, $T_1 \dots T_r$ mat. de transvection telles que

$$\Pi D_n(\mu^{-1}) = T_1 \dots T_r$$

d'où $\boxed{\Pi = T_1 \dots T_r D_n(\mu)}$

Corollaire :

1) $SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{C})$. $M \in SL_n(..)$: on construit un chemin continu reliant M à I_n [NH2G2]

$\exists r \in \mathbb{N}^*, \lambda_1 \dots \lambda_r \in K \setminus \{0\} \ / \ M = T_{i_1 j_1}(\lambda_1) \dots T_{i_r j_r}(\lambda_r)$.

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow SL_n(..)$ | évident...

$$t \longmapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k j_k}((1-t)\lambda_k)$$

Alors γ est continue, $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = I_n$

donc $SL_n(\dots)$ est connexe par arcs donc connexe

2) $GL_n(\mathbb{C})$ [Za]

Soient $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$.

- On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (1-z)M + zN$.
Alors, $z \mapsto \det \varphi(z)$ est polynômiale donc l'ensemble Z de ses zéros est fini.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\psi_a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto t + iat(1-t).$$
ψ_a est continue et $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,t) & \longmapsto & \psi_a(t) \end{array}$ est injective.

- Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in [0,1]$, $\psi_a(t) \notin Z$.
On pose alors $\gamma = \varphi \circ \psi_a$ et :
$\gamma : [0,1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, γ est continue, $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = N$

donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe

3) $GL_n(\mathbb{R})$

a°/ $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \amalg GL_n^-(\mathbb{R})$ donc il suffit de m.q. $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes.

b°/ $GL_n^+(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ à I_n

Soit $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ et $\mu = \det M$. On écrit

$$M = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k j_k}(\lambda_k) \times D(\mu) \qquad \text{où } D(\mu) = D_n(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix}$$

Soit
$$\gamma : [0,1] \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$$
$$t \longmapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k j_k}\big((1-t)\lambda_k\big) \times D\big((1-t)\mu + t\big)$$

alors γ est bien déf., continue, $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = I_n$ donc ...

c°/ $GL_n^-(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^-(\mathbb{R})$ à $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

idem sauf : $D\big((1-t)\underset{<0}{\mu} - t\big)$