VM
16/06/15
1

Fonction continue nulle part dérivable

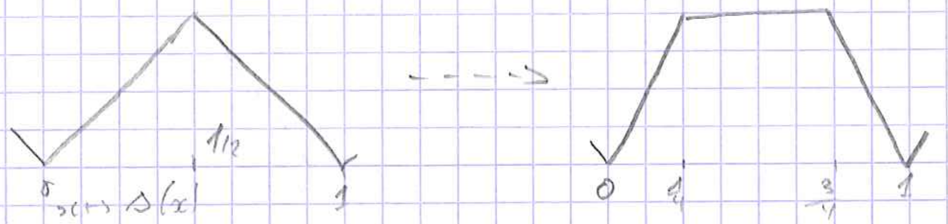
223, 228, 230

Réf : Gourdon

Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique définie par $\Delta(x) = |x|$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$



Théorème : f est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

dém : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\Delta(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Comme $x \mapsto \Delta(2^p x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

. Comme f est 1-périodique, il suffit de prouver que f n'est dérivable en aucun point de $[0,1[$. Soit $x_0 \in [0,1[$.

Soient $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ tq : $x_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$: développement diadique de x_0.

On définit (x'_n) et (x''_n) par

$$x'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad \text{et} \quad x''_n = x'_n + \frac{1}{2^n}.$$

Il est clair que (x'_n) et (x''_n) convergent vers x_0.

On va calculer $\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Lorsque $p \geq n$, $2^p x'_n$ et $2^p x''_n$ sont des entiers donc par 1-périodicité.

la différence $\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n)$ est nulle.

Si $p < n$: $$2^p x'_n = N + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{d_k}{2^{k-p}}$$ où N est entier

$$\Delta(2^p x'_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{d_k}{2^{k-p}}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(2^p x''_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{d_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}\right).$$

On distingue deux cas :

1er cas : $d_{p+1} = 0$: soit $a = \sum_{k=p+2}^{n} \frac{d_k}{2^{k-p}}$, $b = a + \frac{1}{2^{n-p}}$.

On a $0 \le a < b \le \frac{1}{2}$: en effet,

$$b = \sum_{k=p+2}^{n} \frac{d_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \le \sum_{k=p+2}^{n} \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-p-2} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n-p}}$$

$$= \frac{1}{4} \, \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p-1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{n-p}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p-1}\right] + \frac{1}{2^{n-p}} = \frac{1}{2}.$$

$$\Delta(b) - \Delta(a) = b - a = \frac{1}{2^{n-p}}.$$

Donc $$\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n) = \frac{1}{2^{n-p}}.$$

2ème cas : $d_{p+1} = 1$.

$$\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n) = \Delta\left(b + \frac{1}{2}\right) - \Delta\left(a + \frac{1}{2}\right) = a - b = -\frac{1}{2^{n-p}}.$$

Donc $$f(x''_n) - f(x'_n) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2^p}\left(\Delta(2^p x''_n) - \Delta(2^p x'_n)\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{d_{p+1}}}{2^p \, 2^{n-p}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{d_{p+1}}.$$

Soit $$y_n = \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{d_{p+1}}$$ car $x''_n - x'_n = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi (y_n) ne converge pas.

VM
16/06/15
2

Or si f était dérivable en x_0 :

$$f(x_n') - f(x_0) = (x_n' - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_n') \quad \text{avec } \varepsilon_n' \to 0$$

et
$$f(x_n'') - f(x_0) = (x_n'' - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_n'') \quad \text{avec } \varepsilon_n'' \to 0.$$

donc
$$f(x_n'') - f(x_n') = (x_n'' - x_n')f'(x_0) + (x_n'' - x_0)\varepsilon_n'' + (x_0 - x_n')\varepsilon_n'$$

d'où
$$y_n = f'(x_0) + \underbrace{\frac{x_n'' - x_0}{x_n'' - x_n'}}_{|\cdot| \leq 1} \varepsilon_n'' + \underbrace{\frac{x_0 - x_n'}{x_n'' - x_n'}}_{|\cdot| \leq 1} \varepsilon_n'$$

Donc $y_n \to f'(x_0)$.

Ainsi, f n'est pas dérivable en x_0.

f n'est nulle part dérivable.

$\square$