Th : $G_a(x) = e^{-ax^2}$ $\quad a \in \mathbb{R} \quad a>0$

$$\hat{G}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, G_{1/4a}(\xi)$$

preuve : Quitte à faire un changement de variable on peut supposer $a=1$. On doit alors montrer $\hat{G}(\xi) = \sqrt{\pi}\, G_{1/4}(\xi)$

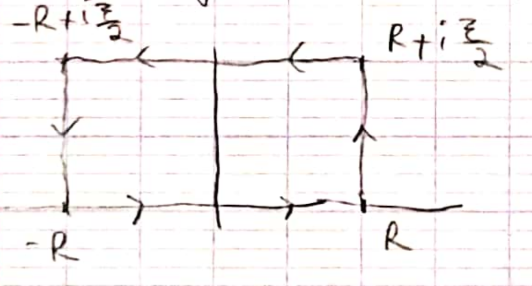
$$\hat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

On $x^2 + ix\xi = \left(x + \frac{i\xi}{2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4}$

D'où $\hat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\left(x+\frac{i\xi}{2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4}\right)} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x+\frac{i\xi}{2}\right)^2} dx$

Il reste alors à calculer $\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x+\frac{i\xi}{2}\right)^2} dx$

On introduit alors la fonction $g \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to e^{-z^2} \end{array}$ et $\Gamma(R)$ le contour du rectangle de sommets $-R, R, R+i\frac{\xi}{2}, -R+\frac{i\xi}{2}$



On a alors $\int_{\Gamma(R)} g(z)\,dz$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + i\int_0^{\xi/2} e^{-(R+it)^2} dt$$

$$- \int_{-R}^{R} e^{-\left(x+i\frac{\xi}{2}\right)^2} dx - i\int_0^{\xi/2} e^{-(-R+it)^2} dt$$

$$= I_1(R) + iI_2(R) - I_3(R) - iI_4(R)$$

$I_1(R)$: $\lim\limits_{R\to+\infty} I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (TCD)

$I_2(R)$ $\quad |I_2(R)| \leq \int_0^{\xi/2a} |e^{-(R+it)^2}|\, dt \leq e^{-R^2} \int_0^{\xi/2} e^{t^2} dt$ $\qquad = e^{-R^2} e^{t^2} |e^{2iRt}| = 1$

donc $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2(R) = 0$

Même chose pour $I_4(R)$

$I_3(R)$: puisque $e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2}$ est de module intégrable

on a $\lim_{R \to +\infty} I_3(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx$

La fonction g étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, le TR de Cauchy affirme que $\int_{\Gamma(R)} g = 0$ et donc $I_1(R) = I_3(R)$ $\forall R \in \mathbb{R}$

Donc $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\pi}$ d'où $\hat{G}(\xi) = \sqrt{\pi}\, G_{1/4}(\xi)$