Th. $p \in]1;+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $\quad Tf : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \end{array}$

(1) $\forall f \in L^p$, $Tf \in L^p$

(2) $\|Tf\|_{L^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \|f\|_{L^p}$

preuve : L'inégalité de Holder nous assure que la quantité $Tf(x)$ est bien définie (pour $f \in L^p$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$)

• Inégalité sur $C_c(\mathbb{R}^+)$: Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^{+*})$ prolongé naturellement en 0

On prend f positive, donc Tf aussi et ainsi Tf^p et Tf^{p-1} bien définis

D'après le Th fond de l'analyse, Tf C^1 et on a

$$Tf'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - Tf(x)) \quad \text{donc } Tf(x) = f(x) - x\,Tf'(x)$$

On intègre Tf^p sur $0 < \varepsilon < R$

$$\int_\varepsilon^R Tf^p\,ds = \int_\varepsilon^R Tf^{p-1}\,Tf\,ds = \int_\varepsilon^R Tf^{p-1} f\,ds - \int_\varepsilon^R Tf^{p-1}(x)\,x\,Tf'(x)\,ds$$

$$= \int_\varepsilon^R Tf^{p-1} f\,ds - \left[\frac{x}{p} Tf^p(x)\right]_\varepsilon^R + \frac{1}{p}\int_\varepsilon^R Tf^p\,ds$$

D'où $$\frac{p-1}{p}\int_\varepsilon^R Tf^p\,ds = \int_\varepsilon^R Tf^{p-1} f\,ds + \frac{\varepsilon Tf^p(\varepsilon)}{p} - \frac{R\,Tf^p(R)}{p}$$

Or on a $Tf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et comme Tf positive, on a l'inégalité

$$\frac{p-1}{p}\int_0^R Tf^p\,ds \leq \int_0^R Tf^{p-1} f\,ds \underset{\text{Holder}}{\leq} \left(\int_0^R Tf^p\,ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^R f^p\,ds\right)^{1/p}$$

$f \in L^p$ car $\in C_c(\mathbb{R}^+)$ donc on a

$$\int_0^R Tf^p\,ds \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\int_0^{+\infty} f^p\,ds\right) \quad \text{donc } Tf \in L^p$$

et par passage à la limite on a l'inégalité recherchée

Si f pas positive on a $|Tf(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt = T_{|f|}(x)$

En appliquant l'inégalité sur $T_{|f|}$ on en déduit $Tf \in L^p$

et on a $\|Tf\|_{L^p}^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_{L^p}^p$.

• Prolongement de l'opérateur $T : C_c(\mathbb{R}^+) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^+)$

$$f \mapsto Tf$$

est linéaire continu et donc unif continu

$C_c(\mathbb{R})$ dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ Banach donc $\exists!$ prolongement

de T sur $L^p(\mathbb{R})$ noté $\tilde{T}$

• Prolongement de l'inégalité : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

suite de $C_c(\mathbb{R}^+)$ / $f_n \xrightarrow{L^p} f$

D'après Holder on a $|Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(t) - f(t)|dt$

$$\leq \frac{1}{x} x^{\frac{p-1}{p}} \|f_n - f\|_{L^p}$$

$\Rightarrow Tf_n$ cv simplement vers Tf

Par continuité de $\tilde{T}$ on a $Tf_n = \tilde{T}f_n \longrightarrow \tilde{T}f$ (ie $Tf_n \to \tilde{T}f$ L^p)

A extraction de ss suite près on peut supposer Tf_n cv p.p

vers $\tilde{T}f$ or on a déja prouvé la convergence simple

donc pour presque tout x on a $Tf(x) = \tilde{T}f(x)$

D'où $Tf \in L^p$ et $\|Tf\|_{L^p}^p = \|\tilde{T}f\|_{L^p}^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_{L^p}^p$