Th : $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$ On note $A = Df(0)$
Si toutes les vp de A sont de partie réelle strictement négative, alors 0 pt equilibre attractif de l'EDO

$$y' = f(y) \qquad y(0) = x$$

Lemme : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vp de partie réelle strictement négative $\exists \alpha > 0 \ / \ \|e^{tA}\| = O(e^{-t\alpha})$

preuve (th) : Dans le cas où $f = A$ (système linéarisé) les solutions sont de la forme xe^{tA}
Par le lemme on conclut directement que l'origine est un point d'équilibre attractif.

On pose $b(x,y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle \, dt$ où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$
D'après C.S on a $|\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle| \leq \|e^{tA}x\| \|e^{tA}y\|$

$$\underset{\text{Lemme}}{\leq} K e^{-t\alpha} \|x\| \|y\|$$

Ce qui assure que $b(x,y)$ est bien définie. $q(x,y)$ est bilinéaire symétrique par linéarité de l'intégrale et bilinéarité/symétrie de $\langle , \rangle$
Soit $q(\cdot)$ la forme quadratique associée.

$$q(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 \, dt \quad (= 0 \Leftrightarrow \|e^{tA}x\| = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+)$$

D'ou $q(\cdot)$ definie positive.

$$q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + q(h)$$

D'où $\langle \nabla q(x) ; Ax \rangle = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt$
$Dq(x)\cdot h = 2b(x,h)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(\|e^{tA}x\|^2) dt$$

$$= \left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^{+\infty} = -\|x\|^2$$

- Soit y une solution de l'EDO, on pose $r(y) = f(y) - Ay$

On $q(y)' = Dq(y)\, y' = 2b(y, y')$

$= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$

Par C.S pour b, q on a

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$$

Comme $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y$. Par définition de la différentielle. $r(y) = o(y)$ d'où $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que

$\frac{\|r(y)\|_q}{\|y\|_q} \underset{y \to 0}{\to} 0$

$q(y) \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$

Et donc $2b(y, r(y)) \leq 2\varepsilon q(y)$

Par équivalence de normes, $\exists C > 0 \;/\; Cq(y) \leq \|y\|^2$

D'où $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$

pour $q(y) \leq \alpha$, $\beta = C - 2\varepsilon$ ($\beta > 0$ si $\varepsilon < \frac{C}{2}$)

Si $q(x) < \alpha$ où x donnée initiale on a $q(y(t)) \leq \alpha$ $\forall t \geq 0$

sinon il existerait $t_0 > 0$ le premier temps tel que $q(y(t_0)) = \alpha$

$q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ et donc $q(y(t))$ devrait être strictement plus grand que α pour t légèrement inférieur à t_0. Le TVI contredit alors la définition de t_0

- En utilisant l'inéquation différentielle vérifiée par $q(y)$

$$(e^{\beta t} q(y))' = e^{\beta t}(q(y)' + \beta q(y))$$
$$\leq 0$$

D'où $e^{\beta t} q(y) \leq q(x)$

Et ainsi $q(y(t)) \leq q(x)\, e^{-\beta t}$