

Th: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert, C convexe fermé non vide

$$\forall x \in H, \exists! y_0 = P_C(x) \in C / \|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

$$\forall y \in C \quad \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$$

preuve: on pose $d = \inf_{y \in C} \|x - y\| = d(x, C)$

$$\forall y, z \in C \text{ on pose } b = x - \frac{1}{2}(y+z), \quad c = \frac{1}{2}(y-z)$$

$$\|b\| \geq d \text{ car } \frac{1}{2}(y+z) \in C \text{ (convexité)}$$

$$\text{et } x - y = b - c, \quad x - z = b + c$$

Par l'identité du parallélogramme on a:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 &= 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) & \|c\| &= \frac{1}{2} \|y - z\| \text{ (def)} \\ &\geq 2d^2 + \frac{1}{2} \|y - z\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \|y - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2)$$

$$\text{On pose alors } C_n = \{ y \in C / \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n \text{ fermé non vide de } H \text{ et } \forall y, z \in C_n$$

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &\leq 2(d^2 + \frac{1}{n} - d^2) + 2(d^2 + \frac{1}{n} - d^2) \\ &\leq \frac{4}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc diamètre des } C_n \text{ est } \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ et } \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow +\infty$$

Or H complet donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ réduit à un point qu'on note $P_C(x)$

$$\text{De plus } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{ y \in C / \|x - y\| = d \}$$

On a donc existence et unicité du projeté

* Soit $y \in C, \forall t \in [0, 1] \quad P_C(x) + t(y - P_C(x)) \in C$ (convexité)

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1] \quad \|P_C(x) + t(y - P_C(x)) - x\| \geq d$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } \varphi: t \mapsto \|P_C(x) + t(y - P_C(x)) - x\|^2 &= \|P_C(x) - x\|^2 + 2t \langle P_C(x) - x, y - P_C(x) \rangle \\ &\quad + t^2 \|y - P_C(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{or } d^2 = \varphi(0) \text{ donc } \varphi(t) \geq \varphi(0) \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \varphi'(0) \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle P_C(x) - x, y - P_C(x) \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$$

lemme : $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert, E sous-espace fermé $\Rightarrow H = E \oplus E^\perp$

preuve : $x \in H$, $x = (x - P_E(x)) + P_E(x)$

E convexe car s.l.v. et fermé par hypothèse

$x - P_E(x) \in E^\perp$ en effet $\forall y \in E$, $\langle x - P_E(x), y \rangle = 0$ car E s.l.v.

$$\Rightarrow \langle x - P_E(x), \langle x - P_E(x), y \rangle y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in E$$

$$\Rightarrow \langle x - P_E(x), y \rangle^2 \leq 0 \quad \forall y \in E$$

$$\Rightarrow \langle x - P_E(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in E \Rightarrow x - P_E(x) \in E^\perp$$

et $P_E(x) \in E$ donc on a $H = E + E^\perp$

De plus $E \cap E^\perp = \{0\}$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini positif

$$(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

Donc $H = E \oplus E^\perp$

Th : Riesz $H \rightarrow H'$ bijection isométrique
 $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$

preuve : $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$ linéaire de noyau $\{0\} \Rightarrow$ injective

Il reste à montrer la surjectivité.

Soit $\ell \in H'$, $K = \ker(\ell)$ (si $\ell = 0$ on prend $x = 0$) $K \neq H$

par lemme précédent $K^\perp \neq \{0\}$

Soit $x \in K^\perp \setminus \{0\}$, $\langle x, x \rangle \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ell(x) = \lambda \langle x, x \rangle$

Puisque K hyperplan $H = K \oplus x\mathbb{R}$

les formes linéaires ℓ et $\langle \cdot, \lambda x \rangle$ coïncident sur K (dof. der.)

et en x donc ℓ et $\langle \cdot, \lambda x \rangle$ coïncident sur H

Isométrie : $\forall y \in H$, $|\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ C.S

$$\Rightarrow \| \langle \cdot, x \rangle \| \leq \|x\|$$

$$\text{car } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \leq \| \langle \cdot, x \rangle \| \|x\|$$

$$\Rightarrow \| \langle \cdot, x \rangle \| \geq \|x\|$$

donc $\| \langle \cdot, x \rangle \| = \|x\|$ d'où $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$ isométrique