VM
11/04/15

Equivalent du nombre de solutions d'une équation diophantienne

124, 126, 140, 190

Réf : Gourdon analyse, chap séries entières

Théorème

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Soit S_n le nombre de solutions $(k_1, \dots, k_p)$ de $k_1\alpha_1 + \dots + k_p\alpha_p = n$ dans $\mathbb{N}^p$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Alors $$S_n \sim \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \alpha_i} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

dém : On pose F la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-X^{\alpha_i}}.$$ n'a pas de pôle en 0 donc

En particulier, $F \in \mathbb{C}[[X]]$. En effet, comme $\forall i \in [\![1,p]\!]$,

$$\frac{1}{1-X^{\alpha_i}} = \sum_{k\geq 0} X^{\alpha_i k}$$

on a :
$$F(X) = \sum_{n\geq 0} \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p} \delta_{k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p = n} X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} S_n X^n. \quad \to \text{égalité dans } \mathbb{C}[[X]]$$

où $S_n = \mathrm{Card}\{(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p \mid k_1\alpha_1+\dots+k_p\alpha_p = n\}$.

= nombre de solutions de l'équation diophantienne.

Comme pour tout $i = 1, \dots, p$, $1-X^{\alpha_i}$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$, tout pôle de $F(X)$ est d'ordre au plus p. Soit ω un pôle d'ordre p de F. Alors $\forall i$, $\omega^{\alpha_i} = 1$.

Soit d l'ordre de ω dans $\mathbb{U}$. Alors d divise α_i $\forall i$. Comme $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, $d = 1$ et par suite $\omega = 1$.

1 est racine de $1-X^{\alpha_i}$ $\forall i$, donc 1 est l'unique pôle d'ordre p de F. On effectue la décomposition en éléments simples de F. Cette décomposition n'a pas de partie polynomiale : soit $(\omega_i)_{i\in I}$ l'ensemble des pôles de F

$$F(X) = \frac{a}{(1-X)^p} + \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

$$= \frac{a}{(1-X)^p} + \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{i,j}}{\omega_i^j} \frac{1}{\left(1-\frac{X}{\omega_i}\right)^j}.$$

On en posant $G(X) = \frac{1}{1-X} = \sum_{n\geq 0} X^n$

on a $$G^{(j-1)}(X) = \frac{(j-1)!}{(1-X)^j} = \sum_{n\geq 0} n(n-1)\cdots(n-j+2)\, X^{n-j+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+j-1)\cdots(n+1)\, X^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(n+j-1)!}{n!} X^n$$

donc $$\frac{1}{(1-X)^j} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} X^n.$$

Ainsi, $$F(X) = \sum_{n\geq 0} X^n \left[a\binom{n+p-1}{p-1} + \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{i,j}}{\omega_i^{j+n}} \binom{n+j-1}{j-1}\right].$$

On $$\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)\cdots(n+1)}{(p-1)!} = \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + O(n^{p-2})$$

donc $$S_n = a\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + O(n^{p-2}).$$

écrire $\mathcal{C}(1)$

On a $$a = F(X)(1-X)^p\Big|_{X=1} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1+X+\dots+X^{\alpha_i - 1}}\Bigg|_{X=1} = \prod_{i=1}^{p}\frac{1}{\alpha_i}$$

d'où $$S_n \sim \frac{1}{\prod_{i=1}^{p}\alpha_i}\,\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$