

Dunford + exponentielle de matrice

Leçons: 153, 154, 155, 157

Réf.: Berhuy, Algèbre: Le grand combat p 368 (2^e édition)

* pas de référence pour l'application

Th. (Dunford)

Soit K un corps, E un K -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

On suppose que X_u est scindé.

Alors il existe un unique couple $(\delta, \nu) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

i) δ est diagonalisable et ν est nilpotent

ii) $u = \delta + \nu$

iii) δ et ν commutent

De plus, δ et ν sont des polynômes en u .

Application:

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $n \geq 1$

On suppose X_A scindé.

Alors: A est diagonalisable SSI $\exp(A)$ est diagonalisable

Th.:

1) Trouver δ et ν

Par hypothèse, $X_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (x - \lambda)^{m_\lambda}$ $m_\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $m_\lambda \leq n$

On pose $E_\lambda^{m_\lambda} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ et p_λ le projecteur sur $E_\lambda^{m_\lambda}$
parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\mu \in \text{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} E_\mu^{m_\mu}$

Alors par le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda^{m_\lambda}$

et $\forall \lambda \in Sp(u), p_\lambda \in K[u]$.

On pose alors $\delta = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$ et $\nu = u - \delta$

2) P.g. δ et ν ont bien les propriétés demandées

a°/ $\delta \nu = \nu \delta, \nu, \delta \in K[u]$

$\forall \lambda \in Sp(u), p_\lambda \in K[u]$ donc $\delta \in K[u]$ et $\nu = u - \delta \in K[u]$.

Or, $K[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

donc δ et ν commutent

On a de plus par construction $u = \delta + \nu$

Rq: $\forall \lambda \in Sp(u), E_\lambda^{m_\lambda}$ est stable par u , donc stable par δ et ν ($\in K[u]$)

On pose alors $\delta_\lambda = \delta|_{E_\lambda^{m_\lambda}}, \nu_\lambda = \nu|_{E_\lambda^{m_\lambda}}, u_\lambda = u|_{E_\lambda^{m_\lambda}}$ et $\text{id}_\lambda = \text{id}|_{E_\lambda^{m_\lambda}}$

b°/ δ diagonalisable

Par définition de p_λ , on a $\delta_\lambda = \lambda \text{id}_\lambda \quad \forall \lambda \in Sp(u)$.

En "recollant" des bases des $E_\lambda^{m_\lambda}$ en une base de E , on obtient alors une base B telle que $\text{Mat}_B(\delta)$ soit diagonale.

Donc, δ est diagonalisable

c°/ ν nilpotent

$\forall \lambda \in Sp(u), \nu_\lambda = (u - \delta)|_{E_\lambda^{m_\lambda}} = u_\lambda - \delta_\lambda = u_\lambda - \lambda \text{id}_\lambda = (u - \lambda \text{id})|_{E_\lambda^{m_\lambda}}$

donc $\nu_\lambda^{m_\lambda} = 0$ donc ν_λ est nilpotent d'indice de nilpotence $\leq m_\lambda \leq n$.

Donc $\forall \lambda \in Sp(u), \nu_\lambda^n = 0$

donc $(\nu^n)|_{E_\lambda^{m_\lambda}} = 0$.

Or, $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda^{m_\lambda}$ donc $\nu^n = 0$ donc ν est nilpotent.

6

à l'unité

Danjon

2

V1

Soient $\delta, \nu \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant i) ii) et iii).

• δ' et ν' commutent, donc commutent avec u , donc δ' et ν' commutent avec δ et ν ($\in K[u]$).

$$u = \delta + \nu = \delta' + \nu'$$

$$\text{donc } \delta - \delta' = \nu' - \nu$$

On, δ et δ' commutent et sont diagonalisables, donc sont diagonalisables dans une même base donc $\delta - \delta'$ est diagonalisable

• ν et ν' commutent et sont nilpotents donc $\nu' - \nu$ est nilpotent (formule du binôme)

On, $\delta - \delta' = \nu' - \nu$ donc $\delta - \delta'$ est diagonalisable et nilpotent, donc $\delta - \delta' = 0$, et donc $\delta = \delta'$ et $\nu = \nu'$.

Application:

$\Rightarrow$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A et $(x_1, \dots, x_n)$ une base de $\vec{V}$ associée.

$$\text{Alors } e^A x_1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \right) x_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A^n x_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} x_1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} \right) x_1$$

si $B_n \rightarrow B$ pour norme
matricielle, subordonnée
donc $B_n x \rightarrow Bx$

continuité de la multiplication par un scalaire dans un ev.

$$\text{donc } e^A x_1 = e^{\lambda_1} x_1$$

$$\text{Donc, } \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ou on utilise $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$ (à savoir justifier proprement également)

⊕ X_A étant soumise par hypothèse, par le th. de Dunford :

$\exists D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ D diagonalisable N nilpotente qui commutent

$$\text{hg } A = D + N \quad \left. \begin{array}{l} \text{donc } e^A = e^D e^N \\ e^N = e^A e^{-D} \end{array} \right\} D \text{ et } N \text{ commutent}$$

$$e^N = e^A e^{-D}$$

On : par hyp., e^A est diagonalisable

D (donc $-D$) est diagonalisable donc e^{-D} est diagonalisable ($\Rightarrow$)

A et D commutent donc e^A et e^{-D} sont co-diagonalisables

Donc, $e^A e^{-D}$ est diagonalisable donc e^N est diagonalisable

Soit $1 \leq p \leq n$ l'indice de nilpotence de N . On a alors $\mu_N = X^p$

On suppose $p > 1$

$$\text{Alors } e^N = I_n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$$

$$\text{donc } e^N - I_n = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$$

On : e^N est diagonalisable donc $e^N - I_n$ est diagonalisable

Les N^k , $1 \leq k \leq p-1$ sont nilpotents et commutent donc $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$ est nilpotente.

Donc $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$ est diagonalisable et nilpotente.

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = 0$$

donc N annule $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$ qui est de degré $p-1 < p = \deg(\mu_N)$
absurde.

D'où, $p = 1$ donc $N^1 = 0$

et $A = D$ est diagonalisable