

Théorème de Burnside

Léons: 106, 157

Réf.: FGN, Cours X-ENS Algèbre 2 3.8 p 185

Th.: (Burnside)

Tout sous-groupe d'exposant fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est fini

1) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Pq. A nilpotente $\Leftrightarrow T_n(A^h) = 0 \quad \forall h \geq 1$

Soit $E = \mathbb{C}^n$, B base canonique de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\text{ob}_B u = A$.

$\Rightarrow$ u nilpotent donc $X_u = X^n$ est scindé et $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

$\exists B$ base de E tq $\text{ob}_B u = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

donc $\forall h \geq 1, \text{ob}_B u^h = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

donc $\forall h \geq 1, T_n(u^h) = T_n(A^h) = 0$.

$\Leftarrow$ P. par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $(H_n) \forall p \leq n, (A \in \text{ob}_p(\mathbb{C}) \text{ et } T_n(A^h) = 0 \forall h \geq 1) \Rightarrow A \text{ nilp}$

• $n = 1$: c'est évident

• $n \geq 2$, O.S.P. (H_{n-1}) vérifie. P.q. (H_n) vérifie

Soit $A \in \text{ob}_p(\mathbb{C})$, $p \leq n$. O.S.P. $p = n$ sinon on applique H.R.

Soit u comme au $\Rightarrow$.

On note $X_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$

$X_u(u) = 0$ donc $T_n(X_u(u)) = 0 = T_n(u^n) + \dots + a_0 T_n(I_n)$

donc $n a_0 = 0$

donc $a_0 = 0$.

Par csq, $X_u = X^n + \dots + a_1 X$ donc $X \mid X_u$.

On écrit $X_u = X^P Q$ où $Q \wedge X = 1$. OSP $\deg Q \geq 1$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a (raisonnée par l'absence de)
 $E = \mathbb{C}^n = \text{Ker } u^P \oplus \text{Ker } Q(u) = F \oplus G.$

Rq : $X^P = X_{u|F}$ et $Q = X_{u|G}$

F et G sont stables par u donc il existe B base de E

telle que $\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où $\Pi \in \text{Mat}_p(\mathbb{C}) = \text{Mat } u|_F$
 $N \in \text{Mat}_{n-p}(\mathbb{C}) = \text{Mat } u|_G.$

$\Pi^p = 0 \Rightarrow \Pi$ nilpotente $\Rightarrow \underline{\forall h \geq 1, \text{Tr } \Pi^h = 0}$

$\forall h \geq 1, \text{Tr}(u^h) = 0$
et $\text{Mat}_B u^h = \begin{pmatrix} \Pi^h & 0 \\ 0 & N^h \end{pmatrix}$

donc $\text{Tr}(\Pi^h) + \text{Tr}(N^h) = 0$

$\text{Tr}(N^h) = 0$

Or, $N \in \text{Mat}_{n-p}(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$ donc par H.R., N est nilpotente.

Donc, $u|_G$ est nilpotent

donc $X \mid X_{u|G} = Q$ absurde car $X \wedge Q = 1$.

Par conséquent, $\begin{cases} \deg Q = 0 \\ X_u \text{ unitaire} \end{cases} \Rightarrow X_u = X^P \text{ (et } p = n \dots)$

donc $u^P = 0$ donc u (et donc A) est nilpotent

G

Burnside

(2)

V2

2) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ une base de $\text{Vect}(G)$ et $f: G \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$A \mapsto (\text{Tr}(A\pi_1), \dots, \text{Tr}(A\pi_n))$$

P. q. pour $A, B \in G$, $f(A) = f(B) \Rightarrow AB^{-1} - I_n$ est nilpotente

Si $f(A) = f(B)$, alors $\forall \pi \in G$, $\text{Tr}(A\pi) = \text{Tr}(B\pi)$.

• Soit $D = AB^{-1} \in G$.

$$\forall k \geq 1, \text{Tr}(D^k) = \text{Tr}(AB^{-1}D^{k-1}) = \text{Tr}(A \overbrace{(B^{-1}D^{k-1})}^{\in G}) = \text{Tr}(B(B^{-1}D^{k-1}))$$

$$\text{donc } \text{Tr}(D^k) = \text{Tr}(D^{k-1})$$

$$\text{donc } \text{Tr}(D^k) = \text{Tr}(I_n) = n$$

• D et I_n commutent, donc

$$\forall k \geq 1, (D - I_n)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i (-1)^{k-i}$$

$$\text{donc } \text{Tr}(D - I_n)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n (-1)^{k-i}$$

$$= n(1-1)^k$$

$$\text{donc } \text{Tr}(D - I_n)^k = 0$$

D'après 1), on a donc $D - I_n$ nilpotente

3) OSP $\forall A \in G$, A est diagonalisable. P. q. f est injective

Soient $A, B \in G$ | $f(A) = f(B)$.

D'après 2), $D - I_n$ est nilpotente (où $D = AB^{-1}$)

Or, $D \in G$ donc D est diagonalisable, et D et I_n commutent

donc $D - I_n$ est diagonalisable

$D - I_n$ est diagonalisable et nilpotente donc nulle,

donc $D = AB^{-1} = I_n$ donc $A = B$ et f est injective.

4) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, P.l.g. G est fini.

Soit $N = \exp(G)$.

$\forall A \in G$, $A^N = I_n$ donc A annule $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable.

D'après 3), f est alors injective donc $|G| = |\text{Im } f|$

On ~~NOW~~ ~~$\text{Im } f \subset \Omega$~~ où ~~$\Omega = \{ \text{Tr}(A), A \in G \}$~~ .

et ~~$\forall A \in G$, $\text{Sp}(A) \subset \mu_N = \{ \zeta \in \mathbb{C} / \zeta^N = 1 \}$~~

donc ~~$|\Omega| \leq N^n$~~

donc ~~$|G| = |\text{Im } f| \leq N^{n^2}$ et G est fini~~

On n'a pas
nécessairement $\Pi_i \in G$

$\exists \lambda_{\pm 1}, \dots, \lambda_{\pm n_1} \in \mathbb{C}, A_{\pm 1}, \dots, A_{\pm n_1} \in G / \Pi_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{\pm i} A_{\pm i}$

donc $|\{ \text{Tr}(A \Pi_1), A \in G \}| \leq \underbrace{(N^n)}_{|\{ \text{Tr}(A A_{\pm i}), A \in G \}|} = N^{n n_1}$

idem pour $\Pi_2 \dots$

donc dans tous les cas, $|\text{Im } f| < +\infty$