

Def: $A \in GL_n(\mathbb{R})$, une décomposition de A est la donnée d'un couple $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M \cdot N$

La méthode itérative associée est alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{k+1} = M^{-1} N u_k + M^{-1} b \end{cases}$$

La méthode est convergente si la suite converge $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$

Et dans ce cas elle converge nécessairement vers la solution u de $Au = b$.

Th: La méthode associée à (M, N) est convergente si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ ou $\rho(A) = \max(\{1, \lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\})$

Lemme: $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. $\exists$ norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

preuve lemme: Puisque toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ $\exists U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = U^{-1}AU = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ soit triangulaire supérieure

Soit $\delta > 0$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |t_{ij}| \leq \varepsilon$

On note alors

$$D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$$

$$T_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta = (UD_\delta)^{-1} A (UD_\delta)$$

On définit alors $\|B\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|(UD_\delta)^{-1} B (UD_\delta) x\|_\infty$

$$= \sup_{\|x\|} \|Bx\| \quad \text{où } \|\cdot\| = \|(UD_\delta)^{-1} \cdot\|_\infty$$

$\|\cdot\|$ est alors la norme subordonnée à $\|\cdot\|$

De plus on a $\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|D_j^{-1} T D_j x\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|(\delta^{j-i} t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} x\|_\infty$

$$= \max_i \sum_{j=1}^n |\delta^{j-i} t_{ij}|$$

$$\leq \rho(A) + \varepsilon \quad \square$$

preuve th: on note $e_k = u_k - u$ l'erreur au rang k

$$e_k = (M^{-1} N u_{k-1} + M^{-1} b) - (M^{-1} N u + M^{-1} b) = M^{-1} N e_{k-1}$$

D'où $e_k = (M^{-1} N)^k e_0$

• Si $\rho(M^{-1} N) < 1$ on construit grâce au lemme une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|M^{-1} N\| < 1$

En particulier $\|e_k\| = \|(M^{-1} N)^k e_0\|$

$$\leq \sup_{\|y\|=\|e_0\|} \frac{\|(M^{-1} N)^k y\|}{\|y\|} \|e_0\|$$

$$\leq \|M^{-1} N\|^k \|e_0\| \leq \|M^{-1} N\|^k \|e_0\|$$

Donc la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et la méthode est convergente

• si $\rho(M^{-1} N) \geq 1$. Soit $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $M^{-1} N$ associé à une valeur propre de module ≥ 1

Alors la méthode itérative ne converge pas en partant

de $u_0 = u + \tilde{u}_1$ ou $u_0 = u + \tilde{u}_2$

En effet $e_k^1 = (M^{-1} N)^k (u + \tilde{u}_1 - u) = (M^{-1} N)^k \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_2$

$$= (M^{-1} N)^k \tilde{u} - i(M^{-1} N)^k \tilde{u}_2$$

$$= (M^{-1} N)^k \tilde{u} - i e_k^2$$

si $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k^1 = 0$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k^2 \neq 0$ et inversement