34 Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$

Ref : Maison + Fulton-Harris.

THÉORÈME 34.1 *On va faire la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et on en déduira que $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$.*

PREUVE.

	1 id	6 (12)	8 (123)	3 (12)(34)	6 (1234)
1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	1	-1
T	3	1	0	-1	-1
ϵ T	3	-1	0	-1	1
W	2	0	-1	2	0

On commence par remplir le caractère trivial et le signature. Ensuite, on va trouver une représentation de dimension 3 de manière géométrique à partir du tétraèdre.

PROPOSITION 34.2 *Soit T un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien. On a l'isomorphisme de groupe :*

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4$$

PREUVE.

Une isométrie (même une transformation affine) du tétraèdre permute les sommets car ce sont les seuls points extrémaux du tétraèdre et que la notion d'extrémalité est affine. D'où le morphisme de groupes :

$$\mathrm{Isom}(T) \to \mathfrak{S}_4$$

Ce morphisme est injectif car une transformation affine, et a fortiori une isométrie, est déterminée par l'image d'une base affine et les sommets en forment une. Il est surjectif car l'image contient les transpositions que l'on réalise par les réflexions par rapport aux plans médiateurs aux arêtes. C'est donc un isomorphisme. □

Cela fournit une représentation de dimension 3 :

$$\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$$

On va calculer son caractère, montrer qu'il est de longueur 1 et en déduire qu'il est irréductible. On calcule la trace de chaque isométrie :

- Transpositions : ce sont des réflexions par rapport aux plans médiateurs (déjà vu), donc c'est de trace 1.
- 3-cycles : ce sont des rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc de trace $1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 0$.
- bitranspositions : ce sont des symétries par rapport à des droites, donc de trace -1.
- 4-cycles : on calcule sa matrice dans la base (e_1, e_2, e_3), des vecteurs joignant le centre à 3 sommets. On trouve $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de trace -1.

On calcule :

$$< \chi_T, \chi_T >= \frac{1}{24}(3^2 + 6 \times 1 + 8 \times 0 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1)^2) = 1$$

Donc c'est bien une représentation irréductible (il est légitime de l'écrire dans la table).

On en trouve une autre en tordant T par le caractère signature qui est bien irréductible car on a $<\chi_{\epsilon T}, \chi_{\epsilon T}> = <\chi_T, \chi_T>$.

D'après la théorie des caractères, il y a autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison et on trouve sa dimension par la formule :

$$\sum_{W \text{ irr}} (\dim W)^2 = |G|$$

On calcule :

$$1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + x^2 = 24$$

C'est donc une représentation de dimension 2 que l'on note W. On trouve son caractère en utilisant l'orthogonalité des colonnes. On a terminé la table des caractères.

Petite application : On remarque que dans cette représentation le sous-groupe distingué V_4 des bitranspositions agit trivialement. En effet, ce sont des endomorphismes d'ordre 2, donc de valeur propre ± 1, et leur trace valant 2, c'est id. (Plus généralement, $\ker \rho = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$ par le même raisonnement sur les valeurs propres).

On en déduit donc une représentation du quotient par passage au quotient :

$$\mathfrak{S}_4/V_4 \to \mathrm{GL}(W)$$

Cette représentation est encore irréductible car si V est une sous-représentation, c'est aussi une sous-représentation de $\mathfrak{S}_4$ puisque V_4 agit trivialement, donc c'est W ou $\{0\}$.

Le groupe quotient $\mathfrak{S}_4/V_4$ admet donc une représentation irréductible de dimension 2, donc ce n'est pas un groupe abélien, c'est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

On comprend alors que la représentation W est la représentation du quotient $\mathfrak{S}_3$ qui agit par isométrie du triangle équilatéral.

$\square$

Remarque : L'isomorphisme $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ se montre aussi par l'argument de Gromov : $2+2 = 4$ de trois façons différentes. Ce développement est un va et vient constant entre algèbre et géométrie, c'est la motivation principale.

Leçons concernées : Représentations, Représentations petit cardinal, Groupe symétrique, Groupe fini, Groupes en géométrie, Isométrie d'un espace affine, Groupe opérant sur un ensemble, (Groupe distingué et quotient).