$(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$

- résoudre $Ax = b$

A inversible, $\exists!$ sol $\bar{x}$

A diag de vp > 0, on note λ_- la plus petite

λ_+ la plus grande.

$\langle x, y \rangle_A = {}^t x A y = \langle x, Ay \rangle$

$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{2} \|x\|_A^2 - {}^t x b \quad (= \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle x, b \rangle)$

Th : (Méthode du gradient)

- Φ admet un unique min : $\bar{x}$
- Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \bar{x}$ On définie $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ g_k = \nabla \Phi(x_k) \\ \alpha_k = \dfrac{\|g_k\|^2}{\|g_k\|_A^2} \quad \text{si } x_k \neq \bar{x} \quad , 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k \end{cases}$$

La suite est convergente de limite $\bar{x}$ de plus $\forall k \geq 0$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$$

---

preuve : $\Phi(x+h) = \frac{1}{2} \|x+h\|_A^2 - \langle b ; x+h \rangle$

$= \frac{1}{2} \|x\|_A^2 + \langle x, h \rangle_A + \frac{1}{2} \|h\|_A^2 - \langle b ; x \rangle - \langle b ; h \rangle$

$= \Phi(x) + \langle Ax - b ; h \rangle + o(\|h\|)$

D'où $\nabla \Phi(x) = Ax - b = A(x - \bar{x})$

Φ convexe coercive et $\bar{x}$ est son seul point critique

Donc $\bar{x}$ unique minimum global.

α_k est l'unique minimum de la fonction

$f : t \to \Phi(x_k - t g_k)$

En effet $f(t) = \Phi(x_k) - t\langle Ax_k - b ; g_k\rangle + \frac{t^2}{2}\|g_k\|_A^2$

$= \Phi(x_k) - t\|g_k\|^2 + \frac{t^2}{2}\|g_k\|_A^2$

f polynome de deg 2 et $f'(\alpha_k) = 0$ donc α_k unique min.

Or on a aussi $f'(\alpha_k) = -\langle\nabla\Phi(x_k - \alpha_k g_k) ; g_k\rangle$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}$ $\langle g_{k+1} ; g_k\rangle = 0$.

- Par définition si $\exists k \in \mathbb{N} / x_k = \bar{x}$, la suite devient stationnaire et donc on suppose pour la suite $x_k \neq \bar{x}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ $\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = \|x_{p+1} - x_p + x_p - \bar{x}\|_A^2$

$= \langle A(x_{p+1} - \bar{x}) ; x_{p+1} - x_p + x_p - \bar{x}\rangle$

$= \langle A(x_{p+1} - \bar{x}) ; x_{p+1} - x_p\rangle + \langle A(x_{p+1} - \bar{x}) ; x_p - \bar{x}\rangle$

Or $\langle A(x_{p+1} - \bar{x}) ; x_{p+1} - x_p\rangle = -\alpha_p\langle g_{p+1} ; g_p\rangle = 0$

Donc $\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = \langle A(x_{p+1} - \bar{x}) ; x_p - \bar{x}\rangle$

$= \langle A(x_{p+1} - x_p + x_p - \bar{x}) ; x_p - \bar{x}\rangle$

$= \langle A(x_{p+1} - x_p) ; x_p - \bar{x}\rangle + \langle A(x_p - \bar{x}) ; x_p - \bar{x}\rangle$

$= \langle x_{p+1} - x_p ; Ax_p - \bar{x}\rangle + \|x_p - \bar{x}\|_A^2$

$= -\alpha_p\langle g_p ; g_p\rangle + \|x_p - \bar{x}\|_A^2$

$= -\frac{\|g_p\|^4}{\|g_p\|_A^2} + \|x_p - \bar{x}\|_A^2$

Or on a aussi $\|x_p - \bar{x}\|_A^2 = \langle A(x_p - \bar{x}) ; x_p - \bar{x}\rangle = \langle A(x_p - \bar{x}) ; A^{-1}A(x_p - \bar{x})\rangle$

$= \|g_p\|_{A^{-1}}^2$

D'où $\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = 1 - \left(\frac{\|g_p\|^4}{\|g_p\|_A^2\|g_p\|_{A^{-1}}^2}\right)\|x_p - \bar{x}\|_A^2$

L'inégalité de Kantorovitch donne

$$\left(1 - \frac{\|g_p\|^4}{\|g_p\|_A^2\|g_p\|_{A^{-1}}^2}\right) \leq \left(1 - 4\frac{\lambda_+\lambda_-}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2}\right) = \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)^2}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2}$$

et donc $\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A \leq \left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}\right)\|x_p - \bar{x}\|_A$

Soit par récurrence $\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A \leq \left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}\right)^{p+1}\|x_0 - \bar{x}\|_A$