

Th: $u \in L(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$, $\exists B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ base de E telle que chaque s.e.v $E_i = \text{vect}(B_i)$ est u -stable et

$$M_{B_i}^{B_i}(u|_{E_i}) = J_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(K) \text{ ou } q_i = \dim(E_i)$$

Lemme 1: $u \in L(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\forall x \in E \setminus \{0\} / u^{q-1}(x) \neq 0$ la famille $B_{u,x} = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et $\text{vect}(B_{u,x})$ est u -stable

Lemme 2: $u \in L(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\exists \phi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et l'orthogonal G dans E de $H = \text{vect}(\phi, {}^t u(\phi), \dots, {}^t u^{q-1}(\phi))$ soient u -stable et $E = F \oplus G$

Preuve Lemme 1: u d'ordre q donc $u^{q-1} \neq 0$ d'où $\exists x / u^{q-1}(x) \neq 0$

Soit x un tel vecteur et $(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in K^m$ famille de scalaires

telle que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. En appliquant u^{q-1} à l'égalité

on a $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0$. Par définition de x , $u^{q-1}(x) \neq 0$ d'où $\lambda_0 = 0$

En appliquant maintenant u^{q-2} on trouve $\lambda_1 u^{q-1}(x) = 0$ et

ainsi $\lambda_1 = 0$. En réitérant le processus on en déduit

$\lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$. D'où $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre.

$F = \text{vect}(B_{u,x})$ est donc de dimension q et u d'ordre q donc

F u -stable.

Preuve Lemme 2: On rappelle que pour H s.e.v de E^* le s.e.v G de E défini par $\{y \in E / \forall \phi \in H \phi(y) = 0\}$ est de $\dim = \dim(E) - \dim(H)$

De plus on a H stable par ${}^t u \Rightarrow G$ stable par u

En effet $\forall y \in G, \phi \in H \phi(u(y)) = {}^t u(\phi)(y) = 0$ donc $u(y) \in G$

Comme u nilpotent d'ordre q , ${}^t u$ nilpotent d'ordre q aussi.

En particulier $\exists \phi \in E^*$ telle que $({}^t u^{q-1})(\phi) \neq 0$. On a donc

$\phi u^{q-1} \neq 0$ d'où $\exists x \in E / \phi u^{q-1}(x) \neq 0$ et ainsi $u^{q-1}(x) \neq 0$.

On applique le lemme précédent sur u, x et ${}^t u, p$
 et on construit $F = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et
 $H = \text{vect}(p, {}^t u p, \dots, {}^t u^{q-1} p)$ qui sont donc deux e.v. de E .

On pose alors $G = \{y \in E \mid \forall p \in H, p(y) = 0\}$

On a bien F stable par u et G aussi.

Comme $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ il reste à montrer $F \cap G = \{0\}$.

Soit $y \in F \cap G$. $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$. Par stabilité de G , $u^{q-1}(y) \in G$.

D'où $p u^{q-1}(y) = 0 = \lambda_0 p(u^{q-1}(x))$ d'où $\lambda_0 = 0$.

On considère maintenant $u^{q-2}(y)$ pour en déduire $\lambda_1 = 0$.

On répète ce procédé pour en déduire $\lambda_0 = \dots = \lambda_q = 0$.

Donc on a bien $E = F \oplus G$.

Preuve Th : récurrence sur $n = \dim E$.

Initialisation : $n=1$ donc $u=0$ et résultat vrai.

Hérédité : supposons le résultat vrai pour dimension $< n$.

En appliquant le lemme on pose $F = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$

et $B_1 = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ avec F stable par u .

$$M_{B_1} u|_F = J_q$$

si $q = n$ c'est fini.

sinon on complète B_1 avec une base de G notée B_2 .

G étant stable par u on a $M_{B_1 \cup B_2}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix}$

où $A_{n-q} \in M_{n-q}(\mathbb{K})$ nilpotente, $q \geq 1$ donc on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence sur A_{n-q} .