Optimisation dans un Hilbert

Original page 336	Corrigé
Théorème 53.5 Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Alors $\overline{F} \bigoplus F^{\perp} = H$. **Théorème 53.6** [Riesz] Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe $a \in H$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$. **Théorème 53.7** [projection sur un convexe fermé] Soit C une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, p_C(x))$. On appelle p_C *l'application de projection sur* C. De plus pour tout $y \in C$, $$\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$	**Théorème 53.7** [projection sur un convexe fermé] Soit C une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, p_C(x))$. On appelle p_C *l'application de projection sur* C. De plus pour tout $y \in C$, $$\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$ **Théorème 53.5** Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Alors $\overline{F} \bigoplus F^{\perp} = H$. **Théorème 53.6** [Riesz] Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe $a \in H$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$.

En effet, l'ordre original est faux car on démontre classiquement le théorème 53.5 à l'aide du théorème de projection sur un convexe fermé (et on démontre le théorème de Riesz à l'aide du théorème 53.5).

Original page 336	Corrigé
Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \ldots, \varphi_i$ ...	Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \ldots, \varphi_i$ ...

Il y a subtilité très technique sur le terme "récurrence" ici qui est du ressort de la logique. En effet, dans une récurrence classique, on démontre en général une propriété $P(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de ce développement, on ne peut pas dire que c'est une récurrence classique car si on disait que la propriété $P(n)$ était "il existe $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ des extractrices telles que ..." et que l'on démontrait cette propriété par récurrence, alors on n'auait pas créé une suite (φ_n) mais uniquement des débuts de suite d'extractrices (qui peuvent ne pas coincider). Or on a besoin de cette suite (infinie) plus tard dans la démonstration.

Ce problème est résolu par l'utilisation de l'axiome du choix dépendant qui permet de construire de telles suites. On parle alors de définition par récurrence **transfinie**. Le principe de démonstration reste cependant le même.

Devant la difficulté technique de ce point qui sort du programme de l'agrégation de mathématiques, on préfera éviter d'en parler mais de garder en tête que cette difficulté existe.

Original page 337	Corrigé
Ainsi $\langle x_i, x_{\psi(k)} \rangle$ converge pour tout i car $(\psi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.	Ainsi $\langle x_i, x_{\psi(k)} \rangle$ converge pour tout i car $(\psi(k))_{k \geq i}$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.