VM
31/12/14

Lemme de Morse

171, 214, 215, 217, 218

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, $0 \in U$.
On suppose $Df(0) = 0$, et $D^2f(0)$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V)$, où V est un voisinage de 0 contenu dans U, tel que $f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

dém : D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$f(x) = f(0) + {}^t x\, Q(x)\, x \quad \text{au voisinage de } 0$$

$$\text{où } Q(x) = \int_0^1 (1-s)\, D^2 f(sx)\, ds.$$

On a $Q : \tilde{U} \to S_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$

et $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$.

Lemme : Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Soit $\gamma : \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^t M A_0 M \end{array}$

Alors il existe W un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\Theta : W \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tel que $\gamma \circ \Theta = \mathrm{id}|_W$.

dém : · γ est polynomiale donc $\mathcal{C}^\infty$.

· $\gamma(I_n + H) = A_0 + {}^t H A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 H$

$$= \gamma(I_n) + {}^t(A_0 H) + A_0 H + \|H\| \varepsilon(H)$$

donc $D\gamma(I_n) : \begin{array}{l} H \mapsto {}^t(A_0 H) + A_0 H. \\ M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \end{array}$

· $D\gamma(I_n)$ est surjective : Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Alors

$$D\gamma(I_n)\left(\frac{1}{2} A_0^{-1} B\right) = B.$$

· $\mathrm{Ker}\, D\gamma(I_n) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \text{ est antisymétrique} \}$

· Soit $\psi : F \cap GL_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ restriction de γ. ψ est $\mathcal{C}^1$.

Soit $F = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \text{ est symétrique} \}$, $I_n \in F$.

Montrer que $D\psi(I_n)$ est surjective

Alors $D\psi(I_n) : F \to S_n(\mathbb{R})$ est bijective

donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe

$\tilde{W}$ un voisinage de I_n dans $F \cap GL_n(\mathbb{R})$ et W un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$

tels que $\psi : \tilde{W} \to W$ soit un C^1-difféo : il existe $\Theta : W \to GL_n(\mathbb{R})$

tel que $\forall x \in W, \quad \gamma \circ \Theta(x) = x$.

$Q(0)$ est symétrique inversible. Soit W un voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$

et Θ tels que $\forall x \in W, \quad x = {}^t\Theta(x)\, Q(0)\, \Theta(x)$.

Comme Q est continue en 0, il existe Ω voisinage de 0 dans U

tel que $M(x) = \Theta(Q(x))$ soit bien définie, C^1 et

vérifie : $\quad Q(x) = {}^tM(x)\, Q(0)\, M(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe

$P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tP \; Q(0) P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Donc $f(x) - f(0) = {}^t(P^{-1} M(x) x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P^{-1} M(x) x$

Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto P^{-1} M(x) x$

On a : $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

- φ est $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
- $D\varphi(0) : x \mapsto P^{-1} M(0) x$

  donc $D\varphi(0) = P^{-1} M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$

Par théorème d'inversion locale, il existe un voisinage V de 0

sur lequel φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.