Théorème de Plancherel

Original page 193	Corrigé
On montre alors par intégration par parties successives (en primitivant $t \longmapsto e^{-itx}$ et en dérivant le reste) que pour tout entier k et tout entier a, $x^a \mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}(u \longmapsto (-iu)^k f(u))^{(a)}(t)dt.$	On montre alors par intégration par parties successives (en primitivant $t \longmapsto e^{-itx}$ et en dérivant le reste) que pour tout entier k et tout entier a, $(ix)^a \mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}(u \longmapsto (-iu)^k f(u))^{(a)}(t)dt.$

Original page 193	Corrigé
On en déduit que la fonction $\lvert h(x,y)\rvert$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi d'après le théorème de Fubini-Tonelli, les fonctions $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx$ et $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)dy \right) dx.$	On en déduit que la fonction $\lvert h(x,y)\rvert$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ par le théorème de Fubini-Tonelli. Ainsi d'après le théorème de Fubini-Lebesgue, les fonctions $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx$ et $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)dy \right) dx.$

En effet, en résumé, le théorème de Fubini-Tonelli permet de dire qu'une fonction $f(x,y)$ est "intégrable" si en intégrant d'abord par x (ou par y) l' intégrale double de $|f(x,y)|$ est finie. On enchaine en général ensuite en en déduisant que "d'après le théorème de Fubini-Lebesgue" les intégrales doubles de $f(x,y)$ sont égales (que ce soit en commençant par x ou par y).