VM
2/05/15
1

Théorème de Morgenstern

201, 205, 243, 244

Réf : Dugundji

Théorème :

$C^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées, contient un ensemble dense de fonctions nulle part développables en série entière.

dém : On définit sur $C^{\infty}([0,1])$ la distance

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min\left(2^{-n}, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty\right).$$

Lemme : $(C^{\infty}([0,1]), d)$ est complet.

(l'admettre dans le développement)

dém : Soit (f_p) une suite de Cauchy dans C^{∞}. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$.

Il existe M tel que $\forall p, q \geq M$, $d(f_p, f_q) < \varepsilon$.

En particulier $\min(1, \|f_p - f_q\|_\infty) < \varepsilon$

donc $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$.

Ainsi (f_p) est de Cauchy dans $C([0,1])$, qui est complet,

donc (f_p) converge uniformément vers $f \in C([0,1])$.

Soit $n \geq 1$. On montre que f est de classe C^n

et que $(f_p^{(n)})$ converge uniformément vers $f^{(n)}$.

Il suffit de prendre $\varepsilon < 2^{-n}$. Alors, pour tout $k \leq n$,

$\min\left(2^{-k}, \|f_p^{(k)} - f_q^{(k)}\|_\infty\right) < \varepsilon$

$\|f_p^{(k)} - f_q^{(k)}\|_\infty$

Ainsi, il existe $(g_1, \dots, g_n)$ tels que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $f_p^{(k)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} g_k$ uniformément

D'après le théorème de dérivation des suites de fonctions, on a bien f de classe C^n et $(f_p^{(n)})$ qui converge vers $f^{(n)}$.

Donc f est C^{∞} et $d(f_p, f) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

□

· Si f est développable en série entière en a, alors sa série de Taylor au point a possède un rayon de convergence non nul, donc d'après la règle de Hadamard

$$\sup_k \left(\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right)^{1/k} < +\infty.$$

Pour tout $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $c \in \mathbb{N}$, on définit

$$T(a,c) = \left\{ f \in C^\infty([0,1]),\ \forall k \geq 0,\ \left(\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right)^{1/k} \leq c \right\}.$$

Comme une fonction DSE en a l'est aussi sur un voisinage de a, elle est dans l'un des $\{T(a,c),\ a \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ c \in \mathbb{N}\}$.

· $T(a,c)$ est fermé (conditions fermées pour la topologie C^∞).

· Si $T(a,c)$ est d'intérieur vide, alors l'ensemble des fonctions DSE en au moins un point est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, donc est d'intérieur vide d'après le théorème de Baire. Par passage au complémentaire, les fonctions nulle part DSE sont denses dans $C^\infty([0,1])$.

· Il reste à montrer que $T(a,c)$ est d'intérieur vide.

Soit $f \in T(a,c)$. Soit $\varepsilon > 0$.

On considère $n \in \mathbb{N}$ et $b > 2$ deux paramètres qu'on ajustera plus tard.

Soit $s(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{b^n} \cos(b(x-a))$.

si k est pair : $s^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + \frac{\varepsilon}{b^n} b^k (-1)^{k/2} \cos(b(x-a))$

si k est impair, $s^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + \frac{\varepsilon}{b^n} b^k (-1)^{k+1/2} \sin(b(x-a))$

Pour tout $k \leq n$, $\quad \|s^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon b^{k-n}$.

Ainsi, $d(s,f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon b^{k-n} + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k}$,

VM
2/05/15
2

$$d(s,f) \leq \varepsilon b^{-n} \frac{b^n - 1}{b-1} + 2^{-n+1}$$

$$\leq \varepsilon + 2^{-n+1} \quad \text{car } b > 2$$

On choisit n assez grand pour que $2^{-n+1} < \varepsilon$.

Ainsi, $s \in B(f, 2\varepsilon)$.

D'autre part, $s^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + \varepsilon b^n (-1)^n \cos(b(x-a))$

donc $\left| s^{(2n)}(a) - f^{(2n)}(a) \right| = \varepsilon b^n$

d'où $|s^{(2n)}(a)| \geq \varepsilon b^n - |f^{(2n)}(a)|$

$\geq \varepsilon b^n - (2n)!\, c^{2n}$.

On choisit b assez grand pour que $\varepsilon b^n > 2(2n)!\, c^{2n}$.

Alors $|s^{(2n)}(a)| > (2n)!\, c^{2n}$.

Ainsi $s \notin T(a,c)$.

Donc $T(a,c)$ est bien d'intérieur vide.