VM
6/04/15

# Equation matricielle

156, 157, 221

Réf : Gourdon analyse, problème 7 du chap ED

**Théorème**

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $Sp_{\mathbb{C}}(A) \cup Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda \mid Re\,\lambda < 0\}$.
Alors, pour tout $C \in M_n(\mathbb{R})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution dans $M_n(\mathbb{R})$.

dém : L'application
$$M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$
$$X \mapsto AX + XB$$
est linéaire. Donc il suffit de montrer la surjectivité de cette application pour montrer le théorème.

Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$.

On pose l'équation différentielle dans $M_n(\mathbb{R})$ :
$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases}$$

$\to$ ED linéaire à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution $Y : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ et cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Cette solution est : $Y(t) = \exp(tA)\, C \exp(tB)$.

Ainsi, en intégrant entre $0$ et $t$, $t \geq 0$, on obtient
$$Y(t) - C = \int_0^t Y'(s)\,ds$$
$$= A\int_0^t Y(s)\,ds + \int_0^t Y(s)\,ds\ B. \qquad (*)$$

Lemme : Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$.
Alors il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que
$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{tA}\| \leq M e^{-\alpha t}$$
$$\|e^{tB}\| \leq M e^{-\alpha t}.$$

Si on admet le lemme, on a $\forall t \geq 0$,
$$\|Y(t)\| = \|e^{tA} C e^{tB}\| \leq \|C\| M^2 e^{-2\alpha t}$$

donc $Y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $s \mapsto Y(s)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, lorsque $t \to +\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$-C = A\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds + \int_0^{+\infty} Y(s)\,ds\; B$$

Soit $X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds$. Alors $X \in M_n(\mathbb{R})$ est solution de $AX + XB = C$.

Ainsi, il ne reste qu'à prouver le lemme :

$A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de Dunford, il existe $D, N \in M_n(\mathbb{C})$ telles que
$A = D + N$
$D$ diagonalisable, $N$ nilpotente
$D$ et $N$ commutent.

Comme $D$ et $N$ commutent, $\forall$ $e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$

Remarquons que $D$ et $N$ sont en particulier trigonalisables, donc comme ils commutent, ils sont cotrigonalisables :

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ : $P^{-1}DP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$P^{-1}NP$ triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

Donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de $A$ : $\exists c > 0$ tel que $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -c \quad \forall i$.

---

$P^{-1} e^{tD} P = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$

En notant $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$,

on a $|||P^{-1}e^{tD}P||| \leq \sup_i e^{t\operatorname{Re}\lambda_i} \quad \forall t \geq 0$

$\leq e^{-ct} \quad \forall t \geq 0$

Comme les normes sont équivalentes sur $M_n(\mathbb{C})$,

$\|P^{-1}e^{tD}P\| = O(e^{-ct})$ quand $t \to +\infty$.

donc $\|e^{tD}\| \leq \|P\|\,\|P^{-1}e^{tD}P\|\,\|P^{-1}\| = O(e^{-ct})$

D'autre part, $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k = o(t^n)$ quand $t \to +\infty$.

donc $e^{tA} = e^{tN}e^{tD} = o(t^n e^{-ct}) = o(e^{-c/2\, t})$.

$\alpha = \frac{1}{2} \inf_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \cup Sp_{\mathbb{C}}(B)} (-\operatorname{Re}\lambda) > 0$, on obtient le résultat.