29/03/15

Théorème de Lax-Milgram et application

208, 213

Réf : Lucquin (avec modifs)

Théorème : (Lax-Milgram)

Soit H un Hilbert. Soit a une forme bilinéaire telle que

$\exists M>0, \ \forall u,v \quad |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$ (a continue)

$\exists \nu>0, \quad \forall u, \quad a(u,u) \geq \nu \|u\|^2$ (a coercive)

Soit l une forme linéaire continue.

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u,v)=l(v)$.

Corollaire : Le problème (E) donné par

$$-\sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + b_0 u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

où Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$,

et ν-elliptique : $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_i \xi_i^2$

b_0 constante >0, $f \in L^2(\Omega)$

admet une unique solution dans $H^1_0(\Omega)$.

dém : (thm)

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que $\forall v \in H$, $l(v) = \langle w, v \rangle$.

Comme a est linéaire par rapport à la seconde variable,

$\forall u \in H, \exists ! A_u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u,v) = \langle A_u, v\rangle$.

But : Mque $\exists ! u \in H$, $A_u = w$.

L'application : $A : H \longrightarrow H$, $u \mapsto A_u$ est linéaire et continue.

En effet, $\forall u, u' \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall v \in H, \ \langle A_{u+\lambda u'} - A_u - \lambda A_{u'}, v \rangle = 0$$

D'autre part $\forall u \in H$,

$$\|A(u)\|^2 = \langle A_u, A_u\rangle = a(u, A_u) \leq M \|u\| \|A_u\|$$

$$\text{donc } \|A(u)\| \leq M \|u\|$$

On pose l'application $T : H \longrightarrow H$, $u \longmapsto u - \rho(A(u) - w)$ où $\rho = \frac{\nu}{M^2}$

On a $A_u = w$ ssi u est point fixe de T.

Or H est complet et T est contractante, car

$\forall u, v \in H$, $\|T(u) - T(v)\|^2 = \|u - v - \eta (A(u) - A(v))\|^2$

$$= \|u-v\|^2 - 2\eta \langle u-v, A(u-v)\rangle + \eta^2 \|A(u-v)\|^2$$

$$= \|u-v\|^2 - 2\eta\, a(u-v, u-v) + \eta^2 \|A(u-v)\|^2$$

$$\leq \|u-v\|^2 \Big[\underbrace{1 - 2\eta \nu + \eta^2 M^2}_{= 1 - \frac{\nu^2}{M^2} < 1}\Big]$$

Donc $\exists! \, u$ tq $A_u = w$ d'après le thm de point fixe de Picard.

$\square$

dém (corollaire) : On note $\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_i |\partial_i u|^2\right)^{1/2}$

On pose : $\cdot$ $H = H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$. H est un Hilbert pour $\|\cdot\|_{H^1}$.

$\cdot$ $a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \partial_j u \partial_i v + \int_\Omega b_0 u v$

$\cdot$ $\ell(v) = \int_\Omega f v$.

On vérifie que :

$\cdot$ ℓ est continue : $|\ell(v)| \leq \int_\Omega |fv| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$ (Cauchy-Schwarz)

$\cdot$ a est continue : $|a(u,v)| \leq \left(\sum_{i,j} \|a_{i,j}\|_{L^\infty} + b_0\right) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

et coercive : $a(u,u) \geq \nu \int_\Omega \sum_i |\partial_i u|^2 + b_0 \int_\Omega |u|^2$

$$\geq \min(\nu, b_0) \|u\|^2_{H^1}.$$

Donc il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $\forall v$, $a(u,v) = \ell(v)$.

Il vérifie $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a(u, \varphi) = \ell(\varphi)$

i.e $\langle -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij} \partial_j u) + b_0 u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$

donc (E) au sens des distributions.

C'est l'unique élément de H^1_0 qui vérifie cela par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$.