VM
11/09/15

Méthode itérative pour les systèmes linéaires.

162, 232, 233

Réf : Dumas

Théorème

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et u l'unique solution de $Au = b$.
Posons $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$, où on a décomposé A en $A = M - N$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $N \in M_n(\mathbb{R})$.
Alors (u_k) converge vers u quelque soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

dém : On note $e_k = u_k - u$ le vecteur d'erreur.

$$Au = b \text{ donc } Mu = Nu + b.$$

$$e_{k+1} = u_{k+1} - u = M^{-1}(Nu_k + b) - M^{-1}(Nu + b)$$
$$= M^{-1}N e_k.$$

Donc $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$.

Supposons $\rho(M^{-1}N) \geq 1$. Alors il existe une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $M^{-1}N$ telle que $|\lambda| \geq 1$. Soit v un vecteur propre associé.

On a $(M^{-1}N)^k v = \lambda^k v$. Or $(\lambda^k v)$ ne converge pas vers 0. On pose $v = v_{Re} + i v_{Im}$, $v_{Re}, v_{Im} \in \mathbb{R}^n$.
Ainsi, une des deux suites $((M^{-1}N)^k v_{Re})$, $((M^{-1}N)^k v_{Im})$ ne converge pas vers 0, donc une des deux méthodes issues respectivement de $u_0 = u + v_{Re}$ et $u_0 = u + v_{Im}$ ne converge pas vers u.

Supposons $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Lemme : (Householder) Il existe $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que la norme subordonnée $|||\cdot|||$ vérifie $|||M^{-1}N||| < 1$.

Alors
$$\|e_k\| = \|(M^{-1}N)^k e_0\| \leq |||(M^{-1}N)^k|||\, \|e_0\|$$
$$\leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\|$$
$$\longrightarrow 0$$

donc $e_k \to 0$: la méthode converge, quelque soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

dém du lemme : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$.

Il s'agit de trouver $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $|||B||| \leq \rho(B) + \varepsilon$.

On trigonalise B : il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Soit $\delta > 0$.

Soit $e'_j = \delta^{j-1} e_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

$$B e'_j = \delta^{j-1} B e_j = \delta^{j-1} \sum_{i \leq j} b_{ij} e_i$$
$$= \sum_{i \leq j} \delta^{j-i} b_{ij} e'_i$$

Donc $\mathrm{Mat}_{(e'_1,\dots,e'_n)}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & & \delta^{j-i} b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Ainsi, il existe $U_\delta \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $U_\delta^{-1} B U_\delta = \begin{pmatrix} b_{11} & & \delta^{j-i} b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$.

On pose la norme $\|x\|_\delta := \|U_\delta^{-1} x\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$.

$$|||B|||_\delta = \sup \left\{ \frac{\|Bx\|_\delta}{\|x\|_\delta}, x \neq 0 \right\}$$
$$= \sup \left\{ \frac{\|U_\delta^{-1} B x\|_\infty}{\|U_\delta^{-1} x\|_\infty}, x \neq 0 \right\}$$
$$= \sup \left\{ \frac{\|U_\delta^{-1} B U_\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty}, y \neq 0 \right\}$$
$$= |||U_\delta^{-1} B U_\delta|||_\infty$$

On $|||C|||_\infty = \sup\limits_i \left\{ \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \right\}$. Donc

$$|||U_\delta^{-1} B U_\delta|||_\infty = \sup_i \left\{ |b_{ii}| + \sum_{i \leq j} \delta^{j-i} |b_{ij}| \right\}.$$

Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall i$, $\sum_{i \leq j} \delta^{j-i} |b_{ij}| < \varepsilon$.

D'autre part, les valeurs propres complexes de B sont les $\{b_{ii}\}_{1 \leq i \leq n}$, donc $\rho(B) = \sup\limits_i |b_{ii}|$. On en conclut que :

$$|||B|||_\delta \leq \rho(B) + \varepsilon.$$