26 Table des caractères et simplicité du groupe

Ref : Peyré

idée : On cherche à trouver les sous-groupes distingués d'un groupe à partir de sa table des caractères. On va montrer qu'ils apparaissent tous dans la table des caractères, cela nous donnera en particulier un critère de simplicité pour un groupe.

La première remarque est que les noyaux des représentations irréductibles apparaissent sur la table des caractères, en particulier on voit lesquelles sont fidèles.

LEMME 26.1 *Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe fini G (pas nécessairement irréductible). Alors :*

$$\ker(\rho) = \{g \in G \quad | \quad \chi(g) = \chi(1)\}$$

PREUVE. Tout repose sur le fait que les $\rho(g)$ sont diagonalisables et leurs valeurs propres sont de module 1. Notons n le cardinal du groupe, par le théorème de Lagrange, on a pour tout g : $\rho(g)^n = \mathrm{id}$. L'endomorphisme $\rho(g)$ est donc annulé par le polynôme $X^n - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. La trace est donnée par la somme des valeurs propres, qui sont des racines de l'unité en nombre $\chi(1)$: la dimension de V. L'inégalité triangulaire ainsi que son cas d'égalité montre que $|\chi(g)| \leq \chi(1)$ avec égalité si et seulement si $\rho(g)$ est une homothétie (une seule valeur propre). En particulier, $\chi(g) = \chi(1)$ si et seulement si $\rho(g) = \mathrm{id}$. □

Maintenant, montrons que tout sous-groupe distingué apparait dans la table :

THÉORÈME 26.2 *Soit G un groupe fini et $(\chi_i)_{i=1\ldots r}$ ses caractères irréductibles. Les sous-groupes distingués de G sont exactement les*

$$\bigcap_{i \in I} \ker \chi_i \qquad \text{pour } I \subset \{1, \ldots, r\}$$

PREUVE. Chaque $\ker \chi_i$ est le noyau d'une représentation donc est un sous-groupe distingué. De plus l'intersection de sous-groupes distingués est encore un sous-groupe distingué, donc cela montre un sens du théorème.

Réciproquement, prenons N un sous-groupe distingué de G et on cherche à écrire N en fonction de représentations de G, ce sont celles de G/N qui vont apparaître.

Soit $(V, \tilde{\rho})$ la représentation régulière du groupe G/N, c'est une représentation fidèle. On l'étend en une représentation de G via la projection $G \to G/N$, notée (V, ρ) et son noyau est exactement N. Décomposons (V, ρ) en somme directe des représentations irréductibles de G :

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} a_i V_i$$

où $a_i \in \mathbb{N}$ est le nombre de fois que V_i apparait dans la représentation V. Le noyau de ρ est l'intersection des noyaux des ρ_i, en effet, $\rho(g)$ agit trivialement sur V si et seulement si il agit trivialement sur chacun des sous-espaces V_i. On a donc :

$$N = \bigcap_{i | a_i \neq 0} \ker \rho_i$$

□

COROLLAIRE 26.3 *Un groupe est simple si et seulement si $\forall i \neq 1, \forall g \neq 1, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$*

Preuve. S'il existe $g \neq 1$, $i \neq 1$ tel que $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, alors la représentation χ_i a un noyau non réduit à l'identité, non égal à tout le groupe car $i \neq 1$, et un noyau est toujours distingué.

Réciproquement, le groupe a un sous-groupe distingué non trivial N. D'après le théorème, il s'écrit $N = \cap_{i \in I} \ker \chi_i$ avec $I \neq \{1\}$, tout élément $g \in N$, $g \neq 1$, vérifie $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ pour tout $i \in I$ et en particulier pour un certain $i \neq 1$. $\square$

Si le temps le permet, montrer sur la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$, les sous groupes distingués à savoir V_4 et $\mathfrak{A}_4$ avec l'inclusion $V_4 \subset \mathfrak{A}_4$.

Leçons concernées : rep, rep de petit cardinal, sous-groupes distingués et quotients.