VM
2/05/15
1

Développement asymptotique de la série harmonique.

224, 230

FGN

Théorème :

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

i) Il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.

ii) $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

iii) On pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid H_k \geq n\}$. Alors $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

Commencer par montrer $H_n \sim \ln n$ par comparaison série intégrale

dém : i) On définit $u_n = H_n - \ln n$,

et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

On va montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

- $u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n - v_n \geq 0$.
- (u_n) est décroissante : en effet, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n$$
$$= \frac{1}{n+1} \cancel{- \ln(n+1) + \ln(n+1)} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

car pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

- (v_n) est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)$$
$$= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

Donc (u_n) converge vers une constante γ.

$v_1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2 > 0$, donc $\gamma > 0$.

ii) Soit $w_n = u_n - \gamma$.

Alors $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

la séries à termes négatifs converge.

D'après le théorème de sommation des équivalents, les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

· Estimons $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

L'application $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante et positive, et intégrable sur $[1, +\infty[$.

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

En sommant $\sum_{k=n}^{+\infty}$: $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=(n-1)}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$

$$\text{Or } \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$$

$$\text{De même, } \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \sim \frac{1}{n}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}.$$

. Retour à w_n : on a

$$-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

iii) On utilise le début du développement asymptotique :

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \text{ où } \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

YM
2/05/15
2

Par définition de k_n, on a : $H_{k_n} \geq n$

$H_{k_n - 1} < n$

donc $\ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$

et $\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$.

Ainsi, $e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n}} \leq k_n < 1 + e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n - 1}}$.

Donc $\dfrac{k_n}{e^n e^{-\gamma}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$; $k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^n e^{-\gamma}$.

On en déduit $\boxed{\dfrac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e}$.

$w_n - w_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

Equivalent de $\sum \dfrac{1}{p^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ $= -\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

$$\sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$w_n = u_n - \gamma$ $\qquad w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$

$x_n = w_n - \dfrac{1}{2n}$

$x_n - x_{n-1} = -\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2(n-1)} \sim \dfrac{1}{6n^3}$.