VM
10/05/15

# Hadamard-Levy

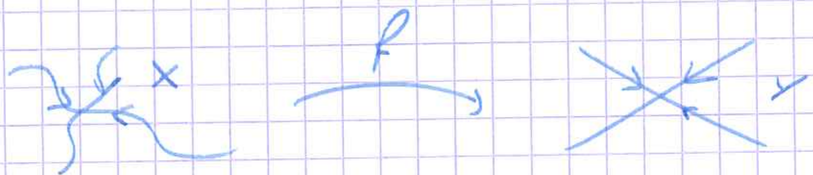
203, 204, 214, 215, 220

## Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une immersion propre $\mathcal{C}^2$.
Alors $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

dém : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df_x$ est injective donc bijective. D'après le théorème d'inversion globale, il suffit de prouver que $f$ est bijective. Quitte à remplacer $f$ par $x \mapsto f(x) - a$, prouvons que $Z = f^{-1}(\{0\})$ est un singleton.

Posons $Y(x) = -x$ sur $\mathbb{R}^n$, et $X(x) = df_x^{-1}(Y(f(x)))$




$X$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t,x) \mapsto \varphi(t,x)$ le flot associé à $X$.

· Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \varphi(t,x)$ est défini sur tout $\mathbb{R}^+$.

En effet, $t \mapsto f(\varphi(t,x))$ est dérivable sur l'intervalle maximal de définition et

$$\frac{d}{dt}\left(f(\varphi(t,x))\right) = df_{\varphi(t,x)}\left(X(\varphi(t,x))\right) = Y(f(\varphi(t,x)))$$
$$= -f(\varphi(t,x))$$

donc $f(\varphi(t,x)) = e^{-t} f(\varphi(0,x)) = e^{-t} f(x)$.

$\forall t \geq 0$, $f(\varphi(t,x)) \in B_F(0, \|f(x)\|)$ donc comme $f$ est propre, $\varphi$ reste dans un compact $\forall t \geq 0$, donc est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ par le lemme de sortie de tout compact.

· Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, y \in Z$ tel que $\varphi(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$.

On regarde $(\varphi(k,x))_{k \in \mathbb{N}}$. Cette suite reste dans un compact, donc il existe $\varphi(k_p, x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} y$.

$$f(\varphi(k_p, x)) = e^{-k_p} f(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

$$\downarrow$$

$$f(y)$$

donc $f(y) = 0$ : $y \in Z$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe

$U$ voisinage de $y$

$\delta > 0$ $\quad f|_U : U \to B(0,\delta)$ $C^1$-difféo.

Il existe $t_0$ tel que $\varphi(t_0, x) \in U$.

<u>lemme</u> : $\forall t \geq t_0$, $\varphi(t,x) \in U$ et $\varphi(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$.

<u>dém</u> : On pose $\psi : t \mapsto \|f(\varphi(t,x))\| = e^{-t}\|f(x)\|$

$\psi$ est décroissante. $\psi(t_0) < \delta$ donc $\forall t \geq t_0$,

$\psi(t) < \delta$ : $f(\varphi(t,x)) \in B(0,\delta)$

Soit $W = \{t \geq t_0 \mid \varphi(t,x) \in U\} = \{t \geq t_0 \mid \varphi(t,x) = f|_U^{-1} \circ f(\varphi(t,x))\}$

$W$ est non vide, ouvert $\overset{\text{dans } [t_0,+\infty[}{}$ par continuité de $\varphi(\cdot, x)$ et fermé donc $W = [t_0, +\infty[$.

Donc $\forall t \geq t_0$, $\varphi(t,x) = f|_U^{-1} \circ f(\varphi(t,x))$

$$= f|_U^{-1}(e^{-t} f(x)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} f|_U^{-1}(0) = y.$$

□

- On pose $\forall y \in Z$, $B(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y\}$.

On a prouvé que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in Z} B(y)$ (réunion disjointe).

Soit $y \in Z$. $B(y)$ est un ouvert non vide.

En effet
- $y \in B(y)$ d'après le lemme car $y \in U$.
- $B(y) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \underbrace{\varphi(t,\cdot)^{-1}(U)}_{\text{ouvert car } \varphi(t,\cdot) \text{ est continue par dépendance continue du flot}}$.

$C$ : si $x \in B(y)$, $\varphi(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$ donc pour $t$ assez grand, $\varphi(t,x) \in U$.

VM
10/05/15

$\supset$ : s'il existe $t_0$ tel que $\varphi(t_0,x) \in U$, d'après le lemme,
$\varphi(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$ donc $x \in B(y)$.

Ainsi, par connexité de $B(y)$, $Z$ est de cardinal $1$.

$\square$

Rq : · $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, mais par théorème d'inversion globale, $f$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme car $f$ est $\mathcal{C}^2$.

· La réciproque du théorème est triviale : si $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo, $f^{-1}$ est continue donc $f$ est propre et la différentielle est inversible en tout point.