Développement: Les Théorèmes de Dini et application

Leçon: 241-Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

1. Premier Théorème de Dini. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, où pour tout $x \in [a,b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f
2. Si f est continue, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f

Démonstration

1. Soit $x \in [a,b]$, comme la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge simplement vers $f_x = f(x)$
2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $x_0 \in [a,b]$, il existe $N = N_{x_0}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{x_0} \implies |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

   Prenons en particulier $n = N$, on a:

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon \tag{1}$$

Comme la fonction $(f_N - f)$ est continue sur le compact $[a,b]$, selon le Théorème de Heine, on en déduit qu'elle est uniformement continue sur $[a,b]$ On peut donc trouver $\alpha = \alpha_{N_{x_0}} > 0$ tel que

$$\forall (x,x_0) \in (\mathbb{R})^2 \quad |x - x_0| \leq \alpha \implies |(f_N(x) - f(x)) - (f_N(x_0) - f(x_0))| \leq \varepsilon \tag{2}$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) et en écrivant
$|(f_N(x) - f(x))| = |(f_N(x) - f(x)) - (f_N(x_0) - f(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))|$
on en déduit que $\forall (x,x_0) \in (\mathbb{R})^2 \quad |x - x_0| \leq \alpha$
$\implies |(f_N(x)-f(x))| \leq |(f_N(x)-f(x))-(f_N(x_0)-f(x_0))|+|(f_N(x_0)-f(x_0))| \leq 2\varepsilon$
qui s'écrit également $\forall (x,x_0) \in (\mathbb{R})^2 \quad x \in B(x_0,\alpha) \implies |(f_N(x) - f(x))| \leq 2\varepsilon$ où $B(x_0,\alpha) = \{x \in [a,b], |x - x_0| \leq \alpha\}$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\alpha > 0$
Comme la famille des boules ouvertes $(B(x_0,\alpha))_{x_0\in[a,b]}$ est un recouvrement du compact $[a,b]$, on peut en extraire un sous recouvrement fini $(B(x_{0_k},\alpha_k))_{1\leq k\leq m}$
Soit $n \geq M$, où M désigne le max des N_{x_k} pour $1 \leq k \leq m$ et $x \in [a,b]$. Il existe $k \in \{1,...,p\}$ tel que $x \in B(x_k,\alpha_k)$ La suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit que

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_M(x) \leq |f(x) - f_M(x)| \leq \varepsilon$$

soit $\forall n \geq M, \forall x \in [a,b], |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$
On conclut que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f

2. Deuxième Théorème de Dini. — Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissantes, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

Démonstration

f est continue sur le compact $[a,b]$, on en déduit selon le théorème de Heine, que f est uniformément continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que $\forall x,y \in [a,b], |x - y| \leq h \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Soit $x_0, x_1, ..., x_p$ une subdivision de $[a,b]$ tel que $a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$ de pas plus petit que h. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f , on a pour tout $i = 1,...,p$
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_i) = f(x_i)$ on en déduit qu'il existe $N \geq 0$
tel que $\forall n \geq N \implies |f(x_i) - f_n(x_i)| \leq \varepsilon$

Soit $x \in [a,b]$ et $i \in \{1,...,p\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f_n(x_i) + f_n(x_i) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + |f_n(x_i) - f_n(x)|$
Comme les fonctions f_n sont croissantes et $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, on a: $f_n(x_i) \leq f(x) \leq f_n(x_{i+1})$
donc $|f_n(x_i) - f_n(x)| = f_n(x) - f_n(x_i) \leq f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)$
$\leq |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| \leq 3\varepsilon$
Soit finalement $|f(x) - f_n(x)| \leq 5\varepsilon$
On en conclut que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f

3. Application. — La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n : [-a,a] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $a \in [0,+\infty[$ converge uniformément sur [-a,a] vers la fonction $f(x) = e^x$

Démonstration

Soit $x \in [-a,a]$, on a: $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$ et comme $\ln(1 + \frac{x}{n}) = x + o(\frac{1}{n})$, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$ On en déduit la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers a fonction $f(x) = e^x$ On a ${f_n}' = (1 + \frac{x}{n})^{n+1} > 0$ où $n \geq 1$ donc les fonctions f_n étant croissante, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f continue, on en déduit en utilisant le deuxième Théorème de Dini que la convergence est uniforme sur $[-a,a]$

Références

Suites et série numériques, Suites et séries de fonctions, Mohammed El Amrani
Les maths en tête Analyse, Xavier Gourdon
Oraux X-ENS Analyse 2, Francinou-Gianella-Nicolas

July 1, 2021
VINCENT KOMIWES