VM
26/04/15
1

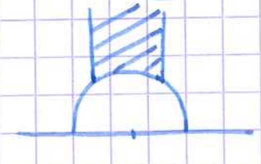
Groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$ 101, 108, 182, 183

Réf: Alessandri, JP Serre

Notations : $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{H}$: 1/2-plan de Poincaré $= \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$.

$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{H} \,,\ |z| \geq 1 \text{ et } |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \}$



Théorème : $PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\overline{S}$ et $\overline{T}$ (par l'image de S et T dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ par la projection canonique $SL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z})$).

dém : On définit l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par

$A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{H}$: $A * z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Vérifions que cette action est bien définie :

- Si $z \in \mathbb{H}$, $cz+d = 0 \Rightarrow c = d = 0$ or ceci est exclu lorsque $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.
- $\operatorname{Im}(A * z) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \right) = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$ car $ad-bc = 1$.
- $A * (B * z) = (AB) * z$
- $I * z = z$

De plus, $A * z = z \ \forall z \in \mathbb{H} \Rightarrow az+b = (cz+d)z \quad \forall z$

$\Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0 \ \forall z$

$\Rightarrow c = b = 0$ et $a = d$

donc A stabilise tout point de $\mathbb{H}$ ssi $A = \pm I_2$.

L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ est donc fidèle.

à admettre dans le plan

- Soit G le sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ engendré par $\overline{S}$ et $\overline{T}$.

On va montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe $\overline{A} \in G$ tel que $\overline{A} * z \in \mathcal{D}$.

Soit $z \in \mathbb{H}$.

- Commençons par construire un point de partie imaginaire maximale dans l'orbite de z par le groupe G :

Il existe un nombre fini de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d| \leq 1$.

En effet, $|c| \operatorname{Im} z = |\operatorname{Im}(cz+d)| \leq |cz+d| \leq 1 \Rightarrow |c| \leq \dfrac{1}{\operatorname{Im} z}$,

et $|d| \leq |cz+d| + |cz| \leq 1 + \dfrac{|z|}{\operatorname{Im} z}$.

Comme $\forall \overline{A} \in G$, $\operatorname{Im}(\overline{A} * z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$

$I_z = \{ \operatorname{Im}(\overline{A} * z) \mid \overline{A} \in G, \operatorname{Im}(\overline{A} * z) \geq \operatorname{Im} z \}$ est fini, donc admet un élément M_z maximal.

Soit $\overline{A_1} \in G$ tel que $\operatorname{Im}(\overline{A_1} * z) = M_z$. Soit $z_1 = \overline{A_1} * z$.

- On translate désormais à altitude constante.

Soit $p = \operatorname{Ent}\left(\operatorname{Re}(z_1) + \frac{1}{2}\right)$. $p \leq \operatorname{Re} z_1 + \frac{1}{2} < p+1$

$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z_1 - p = \operatorname{Re}(z_1 - p) \leq \frac{1}{2}$.

Soit $z_2 = \overline{T}^{-p} * z_1$. Comme $\overline{T} * u = u+1$,

$z_2 = z_1 - p$ donc $|\operatorname{Re} z_2| \leq \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_1 = M_z$.

$\operatorname{Im}(\overline{S} * z_2) = \operatorname{Im}(\underbrace{\overline{S}\,\overline{T}^{-p} \overline{A_1}}_{\in G} * z) \leq M_z$ par maximalité

$= \dfrac{\operatorname{Im} z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{M_z}{|z_2|^2}$ donc $|z_2| \geq 1$.

Ainsi, $z_2 \in \mathcal{D}$ et $z_2 = \overline{S}\,\overline{T}^{-p} \overline{A_1} * z$.

- Lemme : Si $z, z' \in \mathring{\mathcal{D}}$ tels que $\exists \overline{A} \in PSL_2(\mathbb{Z})$, $\overline{A} * z = z'$, alors $\overline{A} = \overline{I_2}$.

Quitte à remplacer $(\overline{A}, z)$ par $(\overline{A}^{-1}, \overline{A} * z)$, on peut supposer $\operatorname{Im}(\overline{A} * z) \geq \operatorname{Im} z$, i.e $|cz+d| \leq 1$.

Or $|cz+d|^2 = c^2 |z|^2 + 2cd \operatorname{Re} z + d^2$

$\geq c^2 + d^2 - |cd|$ car $z \in \mathcal{D}$.

$= (|c| - |d|)^2 + |cd|$

Supposons $|c| \geq 1$. Alors comme $c \neq 0$, et que $z \in \mathring{\mathcal{D}}$, l'inégalité est stricte. De plus, si $|d| \geq 1$, $|cd| \geq 1$ et si $d = 0$, $(|c| - |d|)^2 \geq |c|^2 \geq 1$.

VM
26/04/15
2

Donc $|cz+d|^2 > 1$: exclu.

Ainsi, $c = 0$. Comme $ad - bc = \cancel{1}$, $a = d = \pm 1$.

$\overline{A} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et comme $\underset{\operatorname{Re} z \pm b}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Re}(\overline{A} * z)}}$ et $\operatorname{Re}(z)$ $\in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

on a $b = 0$. Donc $\overline{A} = \overline{I_2}$.

$\square$

Soit $\overline{A} \in PSL_2(\mathbb{Z})$. Soit $z_0 \in \mathring{D}$.

On pose $z_1 = \overline{A} * z_0$.

Il existe $\overline{A'} \in G$ tel que $\underset{z_2}{\underset{\shortparallel}{\overline{A'} * z_1}} \in D$.

$z \mapsto (\overline{A'}\overline{A})^{-1} * z$ est continu donc $z \mapsto (\overline{A'}\overline{A}) * z$ est ouverte :

Quitte à modifier un peu z_0, on peut supposer que $z_2 = (\overline{A'}\overline{A}) * z_0 \in \mathring{D}$.

Alors $\overline{A'}\overline{A} = \overline{I_2}$, donc $\overline{A} = \overline{A'}^{-1} \in G$.

$PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\overline{S}$ et $\overline{T}$.