VM
5/01/15

Processus de branchement

226, 229, 253, 264

Soit $(\xi_i^n)_{\substack{i\geq 1\\ n\geq 1}}$ une famille de v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{N}$

On définit $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{n+1}$ $\forall n \geq 0$.

Soit $m = \mathbb{E}[\xi_1^1] = \mathbb{E}[Z_1]$.

dém un peu long, ne pas écrire l'énoncé

Théorème : On suppose que $\mathbb{P}(Z_1 = 1) \neq 1$.

Alors : · si $m \leq 1$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

· si $m > 1$, $\exists c > 0, \mathbb{P}(Z_n > 0) \geq c$ $\forall n$.

dém : Les événements $\{Z_n = 0\}$ forment une suite croissante, donc $(\mathbb{P}(Z_n = 0))_{n\geq 0}$ est croissante.

Soit φ la fonction génératrice de ξ_1^1 (i.e $\forall s \in [0,1[$ $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(\xi_1^1 = k)$)

Soit φ_n ——————— Z_n.

Lemme : $\forall n \geq 1$, $\varphi_n = \varphi^{\circ n}$ (composée n fois).

dém : par récurrence :

· $n = 1$: $Z_1 = \xi_1^1$ donc $\varphi_1 = \varphi$.

· Supposons que $\varphi_n = \varphi^{\circ n}$ pour un certain $n \geq 1$.

Soit $s \in [0,1[$. $\varphi_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(Z_{n+1} = k) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}]$

$$= \mathbb{E}\Big[s^{Z_{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{Z_n = k}\Big] \underset{\text{Théorème de convergence monotone}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\Big[s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{n+1}} \mathbb{1}_{Z_n = k}\Big]$$

$$\underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[s^{\xi_i^{n+1}}]\, \mathbb{P}(Z_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(s)^k \mathbb{P}(Z_n = k) = \varphi_n(\varphi(s)) = \varphi^{\circ n}(\varphi(s)) = \varphi^{\circ(n+1)}(s).$$

□

φ $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$, $\varphi(1) = 1$.

On $\varphi_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. On s'intéresse donc à la suite $u_n = \varphi_n(0)$: $u_1 = \mathbb{P}(\xi_1^1 = 0)$; $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

$\forall s \in]0,1[, \quad \varphi'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k s^{k-1} \mathbb{P}(Z_1 = k)$

(u_n) croissante donc $u_n \to l$, $l = \varphi(l)$

φ C^0 sur $[0,1]$, $\varphi(1) = 1$.

φ croissante, convexe et $\varphi'(s) \to m$ sur $[0,1]$

Donc $\varphi'(s) \xrightarrow[s \to 1^-]{} \mathbb{E}[Z_1] = m$ et croissante.

$\forall s \in]0,1[\; \varphi''(s) \geq 0$: φ est convexe sur $]0,1[$ donc sur $[0,1]$ par C^0 de φ.

1er cas : $m \leq 1$

$\forall s \leq 1-\varepsilon, \quad \dfrac{\varphi(s) - \varphi(1-\varepsilon)}{s-(1-\varepsilon)} \leq \varphi'(1-\varepsilon)$

car φ est convexe donc en faisant tendre $\varepsilon \to 0$,

$\forall s < 1, \quad \dfrac{\varphi(s) - \varphi(1)}{s-1} \leq m \leq 1$

Donc $\varphi(s) \geq s \quad \forall s < 1$.

Supposons qu'il existe $x \in [0,1[$ tel que $\varphi(x) = x$.

$\varphi - \mathrm{Id}$ est convexe et positive sur $[0,1]$, nulle en x et en 1,

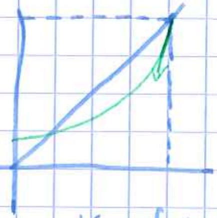
donc nulle sur l'intervalle non trivial $[x,1]$.

Comme $\varphi \cdot \mathrm{Id}$ est analytique sur $]0,1[$, par le principe des zéros isolés, $\varphi(s) = s \; \forall s \in [0,1]$.

C'est exclu car on a supposé $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$.

Donc φ admet un unique point fixe sur $[0,1]$ en 1.

$u_n \to 1$.



2ème cas : $m > 1$.

Soit $a = \frac{1+m}{2} > 1$.

Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall s \in [1-\delta, 1[$, $\varphi'(s) \geq a$

Donc par théorème des accroissements finis,

$\forall s \in [1-\delta, 1[\qquad \dfrac{\varphi(s) - 1}{s-1} \geq a > 1$

donc $\varphi(1-\delta) - 1 < 1-\delta - 1$: $\varphi(1-\delta) < 1-\delta$

D'autre part, $\varphi(0) \geq 0$. Donc par th. des valeurs int., il existe $q \in [0,1[$ tel que $\varphi(q) = q$. On a $\varphi([0,q]) \subset [0,q]$

Donc $u_n \to l$, l point fixe de φ, $l \in [0,q]$, $l < 1$. On prend $c = 1 - l$.