Lemme des noyaux
et
Application au calcul d'exponentielle de matrices

CADRE : Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Théorème 1 (Décomposition des noyaux).
Soit $p \geqslant 2$ un entier et soient $P_1, \ldots, P_p$ des polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$. On a :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(P_k(u))$$

et les projecteurs $\pi_k : \operatorname{Ker}(P(u)) \longrightarrow \operatorname{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Application 2 (au calcul d'exponentielle de matrices).
Calculer e^M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Démonstration du théorème.
On pose $Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} P_i$.
Comme les P_i sont deux à deux premiers entre eux, il en va de même pour les Q_k. D'où, par le théorème de BEZOUT, il existe $R_k \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $\sum_{k=1}^{p} R_k Q_k = 1_{\mathbb{K}[X]}$. Ce qui devient dans $\operatorname{End}(E)$ (en appliquant u) :

$$\sum_{k=1}^{p} (R_k Q_k)(u) = \operatorname{Id}_{\operatorname{End}(E)} \quad , \textit{i.e.}, \quad \sum_{k=1}^{p} R_k(u) \circ Q_k(u) = \operatorname{Id}_{\operatorname{End}(E)}$$

Ainsi, pour $x \in E$, on a : $x = \sum_{k=1}^{p} Q_k(u) \circ P_k(u)(x)$.
Posons : $x_k = R_k(u) \circ Q_k(u)(x)$ et montrons que $x_k \in \operatorname{Ker}(P_k(u))$ quand $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) = K$. Soit $x \in K$, on a :

$$P_k(u)(x_k) = P_k(u)(R_k(u) \circ P_k(u)(x)) = R_k(u) \circ P_k Q_k(u)(x) = R_k(u) \circ P(u)(x) = R_k(u)(0_E) = 0_E$$

Ainsi, tout $x \in K$ se décompose comme somme d'éléments de $\operatorname{Ker}(P_k(u))$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ donc : $K \subset \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(P_k(u))$. Montrons maintenant l'inclusion inverse pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit donc $k \in [\![1, p]\!]$ et soit $x \in \operatorname{Ker}(P_k(u))$. On veut montrer que $P(u)(x) = 0$. On a :

$$P(u)(x) = P_1 \ldots P_p(u)(x) = Q_k P_k(u)(x) = Q_k(u) \circ P_k(u)(x) = Q_k(0_E) = 0_E$$

D'où $\mathrm{Ker}(P_k(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et donc :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k(u))$$

Montrons à présent que la somme est directe. Soit $(x_1,\dots,x_p) \in \prod_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k(u))$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$. Par unicité de la décomposition de 0_E dans une somme directe, on veut montrer que $x_k = 0_E$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$. Soit donc $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} 0_E = Q_k(u)(0_E) = Q_k(u)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) &= \sum_{i=1}^{p} Q_k(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} P_j(u)(x_i) \\ &= 0_E + \cdots + 0_E + Q_k(u)(x_k) + 0_E + \cdots + 0_E = Q_k(u)(x_k) \end{aligned}$$

De plus, $P_k(u)(x_k) = 0$ (car $x_k \in \mathrm{Ker}(P_k(u))$) et comme P_k et Q_k sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $AP_k + BQ_k = 1_{\mathbb{K}[X]}$, *i.e.*, dans $\mathcal{L}(E)$:

$$AP_k(u) + BQ_k(u) = 1_{\mathcal{L}(E)}, \quad i.e., \quad A(u) \circ P_k(u) + B(u) \circ Q_k(u) = 1_{\mathcal{L}(E)}$$

D'où : $x_k = A(u)\circ P_k(u)(x_k) + B(u)\circ Q_k(u)(x_k)$, *i.e.*, $x_k = A(u)(0_E) + B(u)(0_E)$, *i.e.*, $x_k = 0_E$.
Donc :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k(u))$$

De plus, par unicité de la décomposition, on a bien également que $x_k = R_k(u) \circ Q_k(u)(x)$. On obtient ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} \pi_k : & \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k(u)) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(P_k(u)) \qquad \forall k \in [\![1,p]\!] \\ & x = x_1 + \cdots + x_p & \longmapsto & x_k \end{array}$$

qui est la projection de $\mathrm{Ker}(P(u))$ sur $\mathrm{Ker}(P_k(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \mathrm{Ker}(P_j(u))$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

Or, $\pi_k = R_k(u) \circ P_k(u) \in \mathbb{K}[u]$.

□

Démonstration de l'application.
Une application au lemme des noyaux est le calcul d'exponentielle et cela doit se faire en calculant les projecteurs sur les espaces caractéristiques.
On traite ici un exemple simple de e^M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On a : $\quad \mathcal{X}_M = (1-X)(2-X) = P_1P_2$.
On pose alors : $Q_1 = P_2$ et $Q_2 = P_1$. La décomposition des noyaux nous donne les projecteurs comme : $\pi_k = R_k(M)P_k(M)$ pour $k = \{1,2\}$ où $R_k \in \mathbb{K}[X]$ sont les polynômes tels que : $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$, *i.e.*, $R_1P_2 + R_2P_1$, *i.e.*, $R_1(2-X) + R_2(1-X) = 1$.
Ainsi, $R_1 = 1$ et $R_2 = -1$ conviennent et on trouve :

$$\pi_1 = R_1P_2(M) = (2-X)(M) = -M + 2\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = R_2P_1(M) = (X-1)(M) = M - \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut ensuite écrire M en fonction de π_1 et π_2 d'où :

$$M = \pi_1 + 2\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De plus, $\mathrm{Ker}(1-X)$ et $\mathrm{Ker}(2-X)$ sont en somme directe donc on a : $\pi_1\pi_2 = 0$ et π_1, π_2 étant des projecteurs on a $\pi_i^j = \pi_i$ pour $i = 1, 2$ et $j \in \mathbb{N}^*$. D'où :

$$\begin{aligned} e^M &= e^{\pi_1 + 2\pi_2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(\pi_1 + 2\pi_2)^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \pi_1^i \, (2\pi_2)^{k-i} \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \frac{\pi_1^k}{k!} + \frac{(2\pi_2)^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\pi_1}{k!} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{2^k}{k!}\pi_2 = e\pi_1 + e^2\pi_2 = e\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□