1

Série de Fourier divergente

Réf: Tisseron
Gourdon

201, 202, 205, 208, 241, 246

Théorème :

Il existe une fonction continue 2π-périodique qui n'est pas égale à sa série de Fourier.

Rem : Si f est de plus C^1, alors la somme partielle de Fourier converge normalement vers f.

On pose $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. C'est un fermé de $(B(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. En particulier, $(C^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Soit $p \in \mathbb{Z}$. On pose $c_p : C^0_{2\pi} \to \mathbb{C}$

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\ell_n : C^0_{2\pi} \to \mathbb{C}$

$$f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

ℓ_n est la somme partielle de Fourier en $x=0$.

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}$. ℓ_n est une forme linéaire continue de $C^0_{2\pi}$,

et $|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt =: I_n$

où $D_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt}$.

Rem : $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ pour tout $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

ne pas faire si on fait le lemme

En effet, si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t) = e^{-int}\sum_{p=0}^{2n} e^{+ipt} = e^{-int}\dfrac{e^{+i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1}$

d'où $D_n(t) = \cancel{e^{-int}}\dfrac{e^{i\frac{2n+1}{2}t}}{\cancel{e^{i\frac{t}{2}}}}\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

dém du lemme : $\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt$.

donc $|\ell_n(f)| \leq I_n \|f\|_\infty$: ℓ_n est continue et $|||\ell_n||| \leq I_n$.

Pour l'autre inégalité, posons

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \frac{1}{m}} \qquad f_m \in C^0_{2\pi} \text{ et } \|f_m\|_\infty \leq 1.$$

De plus, $$\ell_n(f_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \frac{1}{m}}}_{\xrightarrow[m\to+\infty]{} |D_n(t)|} dt$$

Par théorème de convergence monotone, on a
$$\ell_n(f_m) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = I_n$$

ce qui assure que $I_n \leq |||\ell_n|||$.

$\square$

On peut donc calculer $|||\ell_n|||$:

$$|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\frac{t}{2}}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\sin u|}{u}du$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u}du \geq \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{\pi}|\sin u|\,du}_{=2}$$

$$\geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $|||\ell_n||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On applique le théorème de Banach-Steinhaus à $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Il existe $f \in C^0_{2\pi}$ telle que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\ell_n(f)| = +\infty.$$

Ainsi, la série de Fourier en 0 de f diverge.

f n'est pas égale à sa série de Fourier en 0.

VH
12/6/15
2

(suite de SF divergente)

rajouter au début du développement Banach-Steinhaus

<u>Théorème</u> (Banach-Steinhaus)

Soit E un espace de Banach, F un evn. Soit H une partie de l'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F.

Si $\sup_{h\in H} |||h||| = +\infty$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$\sup_{h\in H} \|h(x)\| = +\infty.$$

<u>dém</u>: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_k = \{x \in E \mid \sup_{h\in H} \|h(x)\| > k\}$.

$$= \bigcup_{h\in H} \{x\in E \mid \|h(x)\| > k\}$$

donc Ω_k est ouvert.

Supposons par l'absurde que pour tout $x \in E$, $\sup_{h\in H}\|h(x)\| < +\infty$.

Alors $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est vide. D'après le théorème de Baire,

comme E est complet, il existe k tel que Ω_k ne soit pas dense dans E.

Il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que $B(x_0,\rho) \cap \Omega_k = \emptyset$.

$\forall x \in B(0,\rho)$, $\forall h \in H$,

$$\|h(x)\| \leq \|h(x_0+x) - h(x_0)\| \leq \|h(x_0+x)\| + \|h(x_0)\| \leq 2k$$

$\forall h \in H$, $\forall x \in E$, $\|x\| = 1$,

$$\|h(x)\| \leq \frac{2}{\rho}\left\|h\left(\frac{\rho}{2}x\right)\right\| \leq \frac{4k}{\rho} \quad \text{donc} \quad |||h||| \leq \frac{4k}{\rho}$$

$$\text{et} \quad \sup_{h\in H} |||h||| \leq \frac{4k}{\rho} < +\infty.$$

$\square$