

Prolongement analytique suivant une courbe

Définitions et notations. On appelle *fonction locale* un couple (f, D) où D est un disque ouvert non vide et f est une fonction analytique sur D . Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe. On appelle *prolongement analytique de (f, D) le long de γ* , une famille de fonctions locales $(f_t, D_t)_{t \in [0, 1]}$ telle que

- (a) $(f_0, D_0) = (f, D)$
- (b) pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D
- (c) pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0, 1]$ vérifiant $|t - t'| < \varepsilon$, $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_{t'} \equiv f_t$ sur cette intersection.

Proposition. Soit (f, D) une fonction locale et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe. Si (f_1, D_1) et $(\tilde{f}_1, \tilde{D}_1)$ sont les extrémités de deux prolongements analytiques suivant γ alors on a $f_1 \equiv \tilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$.

Démonstration. On pose

$$S = \left\{ t_0 \in [0, 1] : \forall t \in [0, t_0], f_t \equiv \tilde{f}_t \text{ sur } D_t \cap \tilde{D}_t \right\}$$

D'abord, S n'est pas vide car il contient 0 par définition. Puisque $[0, 1]$ est connexe, il suffit de prouver que S est ouvert et fermé dans $[0, 1]$ pour conclure que $S = [0, 1]$.

Prouvons que S est fermé. Soit $t_0 \in S$, alors tous les $t \leq t_0$ sont également dans S , de sorte que pour prouver que S est fermé, il suffit de prouver que toute limite de suite *croissante* $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S demeure dans S . Soit $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une telle suite et t_∞ sa limite dans $[0, 1]$.

Par la propriété (c) appliquée à (f_∞, D_∞) , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0, 1]$ vérifiant $|t - t'| < \varepsilon$, $\gamma(t') \in D_{t_\infty} \cap D_{t'}$ et

$$f_{t_\infty} \equiv f_{t'}$$

De même, il existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $t' \in [0, 1]$ vérifiant $|t - t'| < \tilde{\varepsilon}$, $\gamma(t') \in \tilde{D}_{t_\infty} \cap \tilde{D}_{t'}$ et

$$\tilde{f}_{t_\infty} \equiv \tilde{f}_{t'}$$

Ainsi, soit $j \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $|t_j - t_\infty| < \min(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$. En particulier, il vient

$$\gamma(t_j) \in D_{t_\infty} \cap D_{t_j} \cap \tilde{D}_{t_\infty} \cap \tilde{D}_{t_j}$$

et de plus

$$f_{t_\infty} \equiv f_{t_j} \text{ sur } D_{t_\infty} \cap D_{t_j} \text{ et } \tilde{f}_{t_\infty} \equiv \tilde{f}_{t_j} \text{ sur } \tilde{D}_{t_\infty} \cap \tilde{D}_{t_j}$$

Or puisque $t_j \in S$, on a $f_{t_j} \equiv \tilde{f}_{t_j} \equiv f_{t_\infty} \equiv \tilde{f}_{t_\infty}$ sur $D_{t_\infty} \cap D_{t_j} \cap \tilde{D}_{t_\infty} \cap \tilde{D}_{t_j}$ qui un ouvert (intersection d'ouverts) non vide. Par le principe de *prolongement analytique* on a alors $f_{t_\infty} \equiv \tilde{f}_{t_\infty}$ sur $D_{t_\infty} \cap \tilde{D}_{t_\infty}$ et donc on en déduit que $t_\infty \in S$, donc S est fermé.

Montrons que S est ouvert dans $[0, 1]$. Pour cela, on considère T le complémentaire de S dans $[0, 1]$. Soit $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers $t_\infty \in [0, 1]$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, puisque $t_j \notin S$, il existe $s_j \in [0, 1]$ tel que $s_j \leq t_j$ et $f_{s_j} \not\equiv \tilde{f}_{s_j}$ sur $D_{s_j} \cap \tilde{D}_{s_j}$.

Par compacité de $[0, 1]$, quitte à extraire une sous-suite, on peut considérer que la suite $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers $s_\infty \in [0, 1]$.

On remarque que $s_\infty \leq t_\infty$ et donc, il suffit de montrer que $f_{s_\infty} \not\equiv \tilde{f}_{s_\infty}$ sur $D_{s_\infty} \cap \tilde{D}_{s_\infty}$.

Par l'absurde, si tel était le cas, on se retrouve dans la même situation que précédemment à savoir :

pour $j \in \mathbb{N}$ assez grand, on aurait

$$f_{s_j} \equiv \tilde{f}_{s_j} \equiv f_{s_\infty} \equiv \tilde{f}_{s_\infty} \text{ sur } D_{s_j} \cap \tilde{D}_{s_j} \cap D_{s_\infty} \cap \tilde{D}_{s_\infty}$$

avec cette intersection qui est non vide.

Encore une fois, par le principe de prolongement analytique, on obtient une contradiction avec $f_{s_j} \neq \tilde{f}_{s_j}$ sur $D_{s_j} \cap \tilde{D}_{s_j}$. Ainsi, $t_\infty \in T$, donc T est fermé et donc S est ouvert.

On conclut par connexité que $S = [0, 1]$, en particulier, $1 \in S$ et on a donc montré la proposition.

Référence. C. Lesesvre, P. Montagnon. *131 développements pour l'oral* p. 461