Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Thórème. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et il est simple.*

Lemme 1. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.*

Non démontré ici.

Lemme 2. *Le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est réduit à $\{I_3\}$.*

Preuve du lemme 2. Soit $h_0 \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$. Soit D une droite quelconque de $\mathbb{R}^3$ et soit g_0 une rotation non triviale d'axe D. La droite D est ainsi le sous-espace propre pour la valeur propre 1 pour g. Donc h_0 qui commute avec g, stabilise D. Comme on a choisi D quelconque, h_0 stabilise toute droite. D'après 1. le spectre de h_0 est $(1,1,1)$ ou $(1,-1,-1)$. Si par l'absurde, le spectre était $(1,-1,-1)$ on aurait des vecteurs propres v, v' pour les valeurs propres $1,-1$. On voit alors que la droite engendrée par $v+v'$ ne serait pas stabilisée, ce qui est absurde. Ainsi $h_0 = \mathrm{Id}$.

Preuve du théorème.

1. *Montrons d'abord qu'un élément du groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est $O_3(\mathbb{R})$-semblable à une matrice de la forme* $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   Soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$. Les valeurs propres réelles de g sont forcément 1 ou -1. On sait que g possède un polynôme caractéristique réel de degré 3, donc possède une racine réelle : 1 ou -1. Ensuite si $\lambda \in C$ est une racine non réelle, alors $\bar{\lambda}$ en est aussi une. Les choix possibles pour le spectre de g sont donc $(1,\lambda,\bar{\lambda})$, $(1,-1,-1)$ et $(1,1,1)$ (on remarque que $(-1,\lambda,\bar{\lambda})$ est impossible).

   Dans tous les cas, 1 est valeur propre de g, donc il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(v) = v$. On peut le choisir de norme 1. Soit F le plan orthogonal à $\mathbb{R}v$, muni d'une base orthonormée (v', v''). On sait que F est stable par g puisque, pour la forme canonique de $\mathbb{R}^3$, $w \in F$ on a

   $$\langle v, g(w)\rangle = \langle {}^t g(v), w\rangle = \langle g^{-1}(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$$

   L'endomorphisme induit par g sur F est donc de déterminant 1 et respecte la norme quadratique, c'est donc une rotation plane. D'après ce qu'on a vu, on a alors une base orthonormée (v, v', v'') dans laquelle g s'écrit sous la forme R_θ, et la matrice de pasage $P \in O_3(\mathbb{R})$.

2. *Montrons que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.* On va montrer que tout $g \in SO_3(\mathbb{R})$ est relié à Id par un chemin continu, contenu dans $SO_3(\mathbb{R})$.

   D'après 1. $\forall g \in SO_3(\mathbb{R})$ il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $g = PR_\theta P^{-1}$. On considère l'application

   $$\gamma : t \mapsto PR_{t\theta}P^{-1} = PR_{t\theta}^t P$$

   pour $t \in [0,1]$. γ est continue et elle vérifie $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma(1) = g$ et $\gamma(t) \in SO_3(\mathbb{R})$ pour tout t.

3. *Montrons maintenant que $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

   - Soit H un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ (non trivial). Soit $h \in H$, non trivial, on définit

     $$\varphi : SO_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \mathrm{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)$$

     D'abord, φ est continue en tant que composée de fonctions continues, donc l'image de $SO_3(\mathbb{R})$ (qui est connexe) par φ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle (éventuellement un point).

     On voit que $\varphi(\mathrm{Id}) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}) = 3$. De plus, pour tout $g \in SO_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ donc par 1. $\varphi(g) = \mathrm{tr}(R_\alpha) = 1 + 2\cos\alpha$ pour un certain angle α. On en déduit que $\varphi(g) \leq 3$ i.e. $\varphi(SO_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ pour $a \leq 3$.

- Supposons par l'absurde que $a = 3$. Alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = \varphi(g) = 3$, or $1 + 2\cos\theta = 3 \Leftrightarrow \theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = \mathrm{Id}$ c'est à dire $gh = hg$ pour tout g, donc $h \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$ mais donc d'après le **lemme 2** $h = \mathrm{Id}$ ce qui est absurde. On en déduit donc que $a < 3$.

- Par construction, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $1 + 2\cos\theta = a$. Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, tout entier n tel que $0 < \frac{\pi}{n} < \theta$ vérifie $a = 1 + 2\cos\theta < 1 + 2\cos\frac{\pi}{n} < 3$. Soient donc $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$ et $h_n := g_n h {g_n}^{-1} h^{-1}$. Alors l'élément h_n est une rotation de trace $1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$ autrement dit une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$ donc ${h_n}^n$ est une rotation d'angle $n\frac{\pi}{n} = \pi$. C'est donc un retournement.

  De plus, on a supposé H distingué, $h_n \in H$ donc ${h_n}^n \in H$. On a donc trouvé un retournement dans H.

- Montrons pour terminer que H contient tous les retournements. Soit h un retournement, $h \in H$. On appelle D l'axe de ce retournement. Maintenant, on considère h' un retournement quelconque d'axe D'. Soit g une rotation de $SO_3(\mathbb{R})$ qui envoie D sur D', alors ghg^{-1} est encore une rotation d'angle π qui se trouve dans H puisque H est distingué. Or le sous-espace propre pour le vecteur propre 1 du ghg^{-1} est $g(D)$ i.e l'image par g du sous-espace propre par h. Donc ghg^{-1} est un retournement d'axe D', et ainsi $ghg^{-1} = h'$.

  On a donc montré que H contenait tous les retournements, si bien que $H = SO_3(\mathbb{R})$ puisque d'après le **lemme 1** les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$.

Et ainsi s'achève la preuve. □

Carnet de voyage en Algébrie, P. Caldero et M. Peronnier.