Drapeaux de $\mathbb{F}_p^n$ et p-Sylow de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_p)$

Soit n un entier naturel et p un nombre premier. $E := \mathbb{F}_p^n$. Un drapeau complet de E désigne une suite

$$F_* = (F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n)$$

de sous-espaces emboîtés de E tels que $\dim F_k = k$ pour tout k.

Proposition. *L'ensemble des p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des drapeaux complets de E.*

- On montre que $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ agit transitivement sur $\mathcal{F}_n$ par

  $$g \cdot (F_1 \subset \cdots \mathbb{F}_n) := g(F_1) \subset \cdots \subset g(F_n)$$

  Comme $g \in \mathrm{GL}(E)$, pour tout k, le sous-espace $g(F_k)$ est bien de dimension $\dim(F_k) = k$ et de plus g respecte l'inclusion donc $(g(F_1) \subset \cdots \subset g(F_n))$ est bien un drapeau complet et l'action est bien définie.
  On montre que l'action est *transitive*. Soient F_* et F'_* deux drapeaux complets, montrons qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g(F_*) = F'_*$ ie $g(F_k) = F'_k$ pour tout k.
  Soit e_1 un vecteur directeur de la droite F_1. Par le **théorème de la base incomplète**, puisque e_1 est libre dans F_2, on peut compléter e_1 en une base (e_1, e_2) de F_2. De proche en proche, on construit une base $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ soit une base de F_k pour tout k. On appelle une telle base, une base *adaptée* au drapeau F_*.
  De même, on construit une base $(e'_1, \cdots, e'_n)$ telle que $(e'_1, \cdots, e'_k)$ soit une base de F'_k pour tout k (base adaptée à F'_*).
  On sait qu'il existe (un unique) $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g(e_k) = e'_k$ pour tout k, ie $\mathrm{GL}(E)$ agit (simplement mais inutile ici) transitivement sur les bases de E.
  On a alors $g(F_k) = F'_k$ pour tout k.

- Soit F_* un drapeau complet, et soit g dans le stabilisateur de $F*$. Montrons que le *stabilisateur* d'un drapeau complet est isomorphe à un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
  On construit, comme on vient de voir, une base $\underline{e} = (e_1, \cdots, e_n)$ *adaptée* à F_*. On a alors, pour tout k, $g(F_k) = F_k$, en particulier, $g(e_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ pour tout k.
  Cela implique que la matrice $\mathrm{mat}_{\underline{e}}(g)$ est triangulaire supérieure.
  Réciproquement, si g est tel que $\mathrm{mat}_{\underline{e}}(g)$ est triangulaire sup. alors $g(F_k) = F_k$ et donc g stabilise F_k pour tout k, ie g stabilise F_*. Comme $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ (une fois qu'on a fixé une base), on obtient bien que le stabilisateur de F_* est isomorphe au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

- On en déduit le cardinal de $\mathcal{F}_n$. En effet, on a donc montré que $\mathcal{F}_n$ est une seul orbite sous l'action de $\mathrm{GL}(E)$. Par la formule **orbite-stabilisateur**, on a

  $$|\mathcal{F}_n| = \frac{|\mathrm{GL}(E)|}{|\mathrm{Stab}_{GL(E)}(F_*)|}$$

  D'une part, on a le nombre de matrices triangulaires inversibles de taille n est égal à

  $$(p-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

  en effet on impose que les éléments de la diagonale soient non nuls.
  D'autre part,

  $$|\mathrm{GL}(E)| = p^{\frac{n(n-1)}{2}} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p^2 - 1)(p - 1).$$

On obtient alors

$$|\mathcal{F}_n| = \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^2-1)(p-1)}{(p-1)^n} = (p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1)(p^{n-2}+\cdots+1)\cdots(p+1)$$

- On définit maintenant une application ϕ qui à un drapeau complet F_* associe l'ensemble $U_{F_*} \subset \mathrm{GL}(E)$ des éléments *unipotents* du stabilisateur de F_* (c'est à dire ceux dont le spectre est réduit à 1).
  On montre alors que ϕ définit une bijection entre $\mathcal{F}_n$ et l'ensemble des p-Sylow de $\mathrm{GL}(E)$.
  Commençons par montrer que pour $F_* \in \mathcal{F}_n$, l'ensemble U_{F_*} est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
  D'après ce qu'on a montré, en écrivant matriciellement les éléments de U_{F_*} dans une base adaptée à F_*, on obtient alors un ensemble de matrices triangulaires supérieures avec son spectre sur la diagonale principale. On en déduit que U_{F_*} correspond à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec uniquement des 1 sur la diagonale. On vérifie alors facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
  Or, comme p est premier, et que pour tout $k > 0$, p ne divise pas $p^k - 1$, le lemme d'Euclide implique que p ne divise pas $m := (p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^2-1)(p-1)$. Comme $\mathrm{GL}(E)$ est d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}m$, un p-Sylow de $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$, et le sous-groupe U_{F_*} est donc bien un $p-Sylow$ de $\mathrm{GL}(E)$.
  Pour montrer le caractère bijectif de ϕ, commençons par l'injectivité.
  Pour ce faire, on montre l'égalité pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$F_k = \bigcap_{g \in F_*} \ker(g - \mathrm{Id})^k$$

  Ainsi, F_* est uniquement déterminé par U_{F_*}, et l'injectivité en découle.
  Notons que prendre $g \in U_{F_*}$ revient à dire que l'inclusion $(g - \mathrm{Id})(F_k) \subset F_{k-1}$ a lieu pour tout k. On peut le voir matriciellement dans une base adaptée au drapeau F_* : dans une telle base, $g - \mathrm{Id}$ s'écrit comme une matrice triangulaire stricte.
  Il est clair que si x est dans F_k alors, par récurrence, $(g - \mathrm{Id})^l(x)$ est dans F_{k-l} et donc $(g - \mathrm{Id})^k(x) = 0$, ce qui donne l'inclusion directe.
  Pour l'inclusion inverse, il suffit de trouver g dans U_{F_*} tel que $\ker(g - \mathrm{Id})^k \subset F_k$. On construit donc une base $(e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à F_*, c'est à dire telle que $(e_1, \ldots, e_k)$ soit une base de F_k pour tout k.
  Soit g tel que $g(e_i) = e_i + e_{i-1}$, pour tout i, en posant $e_0 = 0$.
  On a donc $(g - \mathrm{Id})(e_i) = e_{i-1}$ pour tout i, ce qui implique $(g - Id)^k(e_i) = e_{i-k}$ pour $i > k$ et 0 sinon. Si $x = \sum_i x_i e_i$ est dans $\ker(g - \mathrm{Id})^k$, on a alors $\sum_{i>k} x_i e_{i-k} = 0$. Cela implique que $x_i = 0$ pour tout $i > k$ et donc $x \in F_k$. L'inclusion $\ker(g - \mathrm{Id})^k \subset F_k$ est alors montrée.

  Il reste à montrer la surjectivité. Soit S un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. On veut trouver un drapeau F_*^S tel que $U_{F_*^S} = S$. Soit F_* un drapeau complet quelconque et F_* son p-Sylow associé. Comme U_{F_*} et S sont deux p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, par les théorèmes de Sylow, ils sont conjugués, c'est à dire on peut poser $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ tel que $gU_{F_*}g^{-1} = S$.
  Posons $F_*^S = g \cdot F_*$ pour l'action définie précédemment. D'après le **principe de conjugaison**, le stabilisateur de F_*^S est le conjugué par g du stabilisateur de F_*. De plus, comme le spectre est invariant par conjugaison, on a $U_{F_*^S} = gU_{F_*}g^{-1} = S$, ce qui achève la preuve. □

Référence. *Carnet de voyage en Algébrie*, P. Caldero et M. Peronnier. (p.151)