
Convergence de la méthode QR

Théorème

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres simples de modules tous différents.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$.

On suppose que P^{-1} admet une factorisation LU.

Alors la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ de la méthode QR converge vers Λ .

La continuité de φ^{-1} vient de la méthode de calcul de la décomposition QR.

DÉMONSTRATION

D'après la définition de la méthode QR, pour tout $k \geq 1$, $A_{k+1} = R_k Q_k$ où $Q_k R_k$ est la décomposition QR de A_k .

Il est immédiat que $\forall k \geq 1$, $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k$ car Q_k est unitaire.

Par récurrence immédiate, $\forall k \geq 1$, $A_{k+1} = Q_k^* A Q_k$ où $Q_k = \prod_{i=1}^k Q_i$.

On remarque que $\forall k \geq 1$, $A^k = Q_k R_k$ où $R_k = \prod_{i=0}^{k-1} R_{k-i}$.

En effet $Q_1(R_1 Q_1) \dots (R_1 Q_1) R_1 = Q_1(Q_2 R_2) \dots (Q_2 R_2) R_1 = \dots$

On note $P = QR$ et $P^{-1} = LU$ les factorisations QR et LU respectives.

Alors

$$\forall k \geq 1, A^k = P \Lambda^k P^{-1} = QR(\Lambda^k L \Lambda^{-k}) \Lambda^k U.$$

On a $\forall k \geq 1$, $\Lambda^k L \Lambda^{-k} = (\lambda_i^k L_{ij} \lambda_j^{-k})_{ij}$ triangulaire inférieure à diagonale de 1. De plus

$$\forall k \geq 1, \forall i > j, (\Lambda^k L \Lambda^{-k})_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k L_{ij} \xrightarrow{+\infty} 0.$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Lambda^k L \Lambda^{-k} = I_n.$$

En particulier,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R(\Lambda^k L \Lambda^{-k}) R^{-1} = I_n.$$

Pour tout $k \geq 1$, on note $\tilde{Q}_k \tilde{R}_k$ la factorisation QR de $R(\Lambda^k L \Lambda^{-k}) R^{-1}$.

Comme $U_n(\mathbb{C})$ est compact, il existe une sous-suite $(Q_{\psi(k)})_{k \geq 1}$ de $(Q_k)_{k \geq 1}$, convergeant vers une limite $\tilde{Q} \in U_n(\mathbb{C})$.

Alors

$$\forall k \geq 1, \tilde{R}_{\psi(k)} = \tilde{Q}_{\psi(k)}^{-1} R \Lambda^{\psi(k)} L \Lambda^{-\psi(k)} R^{-1} \xrightarrow{+\infty} \tilde{Q}^{-1}.$$

La sous-suite $(R_{\psi(k)})_{k \geq 1}$ converge vers une limite $\tilde{R} \in T_n^+(\mathbb{C})$.

Ainsi à la limite, $I_n = \tilde{Q} \tilde{R}$ avec $\tilde{Q} \in U_n(\mathbb{C})$ et $\tilde{R} \in T_n^+(\mathbb{C})$.

Par unicité de la décomposition QR,

$$\tilde{Q} = \tilde{R} = I_n.$$

Comme on peut tenir ce raisonnement pour toute sous-suite convergente de $(Q_k)_{k \geq 1}$, on en déduit que cette suite a pour unique valeur d'adhérence $\tilde{Q} = I_n$. Comme cette suite est bornée, elle converge vers I_n .

On en déduit immédiatement que la suite $(R_k)_{k \geq 1}$ converge vers $\tilde{R} = I_n$.

Par ailleurs

$$\forall k \geq 1, A^k = [R \Lambda^k L \Lambda^{-k} R^{-1}] R \Lambda^k U = (Q \tilde{Q}_k)(\tilde{R}_k R \Lambda^k U) = Q_k \mathcal{R}_k.$$

Comme pour tout $k \geq 1$, la matrice $\tilde{R}_k R \Lambda^k U$ est triangulaire supérieure. Il existe $D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale tel que

$$D_k \tilde{R}_k R \Lambda^k U \in T_n^+(\mathbb{C}) \text{ et } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |(D_k)_{i,i}| = 1.$$

Par unicité de la décomposition QR,

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} Q_k = Q \tilde{Q}_k D_k^* \\ \mathcal{R}_k = D_k \tilde{R}_k R \Lambda^k U \end{cases}.$$

Comme $A = A^1 = QR\Lambda R^{-1}Q^*$,

$$\begin{aligned}\forall k \geq 1, A_{k+1} &= Q_k^* A Q_k \\ &= (D_k \tilde{Q}_k^* Q^*)(QR\Lambda R^{-1}Q^*)(Q\tilde{Q}_k D_k^*) \\ &= D_k \tilde{Q}_k^* R\Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k D_k^*.\end{aligned}$$

Pour tout $k \geq 1$, on pose $B_{k+1} = \tilde{Q}_k^* R\Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k$.

D'après précédemment, la suite $(B_k)_{k \geq 2}$ converge et $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = R\Lambda R^{-1}$.

Donc pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}A_{k+1} &= D_k B_{k+1} D_k^* \\ &= D_k \left(\sum_{l=1}^n (B_{k+1})_{il} (D_k^*)_{lj} \right)_{ij} \\ &= D_k ((B_{k+1})_{ij} (D_k^*)_{jj})_{ij} \\ &= ((D_k)_{ii} (B_{k+1})_{ij} (D_k^*)_{jj})_{ij} \\ &= \text{diag}((B_{k+1})_{1,1} \dots (B_{k+1})_{n,n}) \text{ car } D_k \text{ est diagonale} \\ &= \text{diag}(B_{k+1}).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}R\Lambda R^{-1} &= R \left(\sum_{l=1}^n \Lambda_{il} (R^{-1})_{lj} \right)_{ij} = R(\lambda_i (R^{-1})_{ij})_{ij} \\ &= \left(\sum_{l=1}^n R_{il} \lambda_l (R^{-1})_{lj} \right)_{ij} \\ &= \left(\mathbb{1}_{[i; +\infty[}(j) \sum_{l=i}^j R_{il} \lambda_l (R^{-1})_{lj} \right)_{ij} \text{ car } R \text{ est triangulaire supérieure.}\end{aligned}$$

Comme les coefficients diagonaux de R^{-1} sont les inverses respectifs des coefficients diagonaux de R , $R\Lambda R^{-1}$ est triangulaire supérieure de diagonale Λ .

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_{k+1} = \text{diag}(R\Lambda R^{-1}) = \Lambda$. □