
Théorème de Sylow

Exemple — L'ensemble T des matrices triangulaires supérieures à diagonale de 1 est un p -Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

En effet, $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est en bijection avec l'ensemble des bases de $\mathbb{F}_p^n$, ce qui donne

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} p^i \right) m = p^{n(n-1)/2} m$$

avec $p \nmid m$

$$\text{et } |T| = \prod_{i=1}^{n-1} p^i = p^{n(n-1)/2}.$$

Lemme — On suppose $|G| = n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$.

Soit H un sous-groupe de G et S un p -Sylow de G .

Alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un p -Sylow de H .

DÉMONSTRATION

Soit $a \in G$.

G opère sur G/S (quotient à droite) par translation à gauche. Pour cette action, le stabilisateur de $aS \in G/S$ est $aSa^{-1} \subset G$.

H opère aussi sur G/S et, pour cette action, le stabilisateur de aS est $aSa^{-1} \cap H$.

Comme aSa^{-1} est un p -groupe et chaque $aSa^{-1} \cap H$ est un de ses sous-groupes, les $aSa^{-1} \cap H$ sont des p -sous-groupes de H .

On suppose que pour tout $a \in G$, $|H/aSa^{-1} \cap H|$ est divisible par p .

Comme $G/S = \bigcup_{aS \in G/S} (\text{orbite de } aS \text{ par action de } H)$, on a

$$|G/S| = \sum_{aS \in G/S} |H \cdot aS| = \sum_{aS \in G/S} |H/aSa^{-1} \cap H| \text{ divisible par } p.$$

Contradiction.

Il existe $a \in G$ tel que $|H/aSa^{-1} \cap H|$ n'est pas divisible par p , ce qui est suffisant pour conclure. $\square$

Théorème

Si $|G| = n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$ alors G a un p -Sylow.

DÉMONSTRATION

D'après le théorème de Cayley, G s'injecte dans $\mathfrak{S}_n$, qui s'injecte lui-même dans $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. On a vu plus tôt que $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p -Sylow S . Alors d'après le lemme, G admet un p -Sylow. $\square$

Théorème

Soit G groupe de cardinal $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$. Alors

- pour tout p -sous-groupe H de G , il existe un p -Sylow S de G tel que $H \subset S$
- tous les p -Sylow de G sont conjugués (on note leur nombre k)
- k divise m et $k \equiv 1 \pmod{p}$.

DÉMONSTRATION

- Soit H un p -sous-groupe de G .
D'après le théorème précédent, il existe un p -Sylow S de G .
D'après le lemme, il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un p -Sylow de H .
Comme H est un p -groupe, $aSa^{-1} \cap H = H$ soit $H \subset aSa^{-1}$ qui est aussi un p -Sylow.
- Soit H un p -Sylow de G .
D'après précédemment, il existe $a \in G$ tel que $H \subset aSa^{-1}$.
Par un argument de cardinal, $H = aSa^{-1}$.
- Comme on a une bijection entre $G/\text{Stab}_G(S)$ et l'orbite de S pour l'action de G sur l'ensemble X des p -Sylow de G .
Or d'après le point précédent, l'orbite de S coïncide avec X .
En passant au cardinal, $n = |G| = |\text{Stab}_G(S)| \cdot k$ d'où $k \mid n$.

On considère l'action d'un p -Sylow S de G sur X . Comme S est p -groupe,

$$|\text{fix}(S)| \equiv |X| \pmod{p}.$$

Soit $T \in \text{fix}(S)$.

On pose $N = ST$. Comme $N \subset G$, S et T sont des p -Sylow de N .

Comme $T \in \text{fix}(S)$, $T \triangleleft N$ et d'après le deuxième point, $T = S$.

Donc $\text{fix}(S) = \{S\}$.

On conclut $|X| \equiv 1 [p]$ et on en déduit que $k \mid m$.

□