Table de $\mathfrak{S}_4$

L'objectif de ce développement est la construction de la table de $\mathfrak{S}_4$.

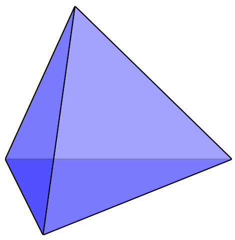
Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ sont donnés par les longueurs des cycles à support disjoints. Des représentants de chaque classe sont
Id, $(1\ 2)$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2)(3\ 4)$ et $(1\ 2\ 3\ 4)$.

D'ailleurs les cardinaux de ces classes de conjugaison sont respectivement : 1, 6, 8, 3 et 6.

On en déduit que $\mathfrak{S}_4$ a 5 représentations irréductibles, dont la représentation triviale, notée 1 et la signature, notée ε.
Ces 2 représentations sont bien sûr irréductibles puisqu'elles sont de degré 1.

$\mathfrak{S}_4$	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1

On va construire une représentation ρ de degré 3 de $\mathfrak{S}_4$ comme groupe de permutation des sommets d'un tétraèdre. On note χ le caractère de ρ.



On choisit pour repère affine (O, x, y, z) où O est le centre du tétraèdre, et x, y et z sont les vecteurs joignant O aux sommets 2, 3 et 4 du tétraèdre.

De manière immédiate, $\chi(\mathrm{Id}) = 3$.

La transposition $(1\ 2)$ est associée à la symétrie par rapport au plan passant par les points 3,4 et le centre du segment $[1,2]$, soit

$$\rho(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi(1\ 2) = 1.$$

Le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$ est associé à la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ dans le plan passant par les sommets 1,2 et 3, soit

$$\rho(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi(1\ 2\ 3) = 0.$$

Le produit de 2-cycles $(1\ 2)(3\ 4)$ est associé à la symétrie par rapport à la droite passant par les mileux des segments $[1,2]$ et $[3,4]$. Comme $\rho((1\ 2)(3\ 4))$ est une symétrie par rapport à une droite,

$$\rho((1\ 2)(3\ 4)) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi(1\ 2\ 3) = -1.$$

Le 4-cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$ permute comme suit nos vecteurs de base :
$\rho(1\ 2\ 3\ 4)(x) = y,\ \rho(1\ 2\ 3\ 4)(y) = z,\ \rho(1\ 2\ 3\ 4)(z) = -x - y - z$
soit

$$\rho((1\ 2\ 3\ 4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi(1\ 2\ 3) = -1.$$

On calcule la norme de χ :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{24}(3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1)^2) = 1.$$

Donc c'est un caractère irréductible de $\mathfrak{S}_4$.

De plus comme $\chi(1\ 2) \neq 0$ alors $\varepsilon\chi$ est un autre caractère irréductible de $\mathfrak{S}_4$.

On note η le dernier caractère irréductible. D'après la formule de Burnside, il est de degré 2.

$\mathfrak{S}_4$	**Id**	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	0	-1	1
η	2				

Par orthogonalité des colonnes, on peut calculer les valeurs de η :

$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2\chi(1\ 2) = 0 \Leftrightarrow \chi(1\ 2) = 0$

$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2\chi(1\ 2\ 3) = 0 \Leftrightarrow \chi(1\ 2\ 3) = -1$

$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 2\chi((1\ 2)(3\ 4)) = 0 \Leftrightarrow \chi((1\ 2)(3\ 4)) = 2$

$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 2\chi(1\ 2\ 3\ 4) = 0 \Leftrightarrow \chi((1\ 2\ 3\ 4)) = 0.$

On aurait pu se douter que $\eta(1\ 2) = \eta(1\ 2\ 3\ 4) = 0$ car $\varepsilon(1\ 2) = \varepsilon(1\ 2\ 3\ 4) = -1$ et comme η est le seul caractère irréductible de degré 2 de $\mathfrak{S}_4$, on a $\varepsilon\eta = \eta$.

On complète la table de caractères.

$\mathfrak{S}_4$	**Id**	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	0	-1	1
η	2	0	-1	2	0