
Densité des polynômes orthogonaux

Théorème

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de poids.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < \infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux pour le poids ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

DÉMONSTRATION

Il suffit de montrer que l'espace H engendré par cette famille orthonormale est dense.

Soit $f \in L^2(I, \rho)$.

On suppose que $f \in H^\perp$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, (x \mapsto x^{2n} \rho(x)) \in L^1(\mathbb{R})$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x \mapsto x^n) \in L^2(I, \rho).$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, (x \mapsto x^n) \in H$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \langle x^n, f \rangle_\rho = 0$.

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} f(x) \rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\forall t \geq 0, t \leq \frac{1}{2}(1 + t^2)$, on a

$$\forall x \in I, |f(x)| \rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + f(x)^2) \rho(x).$$

Comme ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I , on en déduit que φ est intégrale sur $\mathbb{R}$.

On peut définir sa transformée de Fourier

$$\widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} dt = \int_I f(t)\rho(t) e^{-itx} dt.$$

On pose $B_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\}$.

On montre que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur B_α .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto \varphi(t)\rho(t) e^{-itz}$ est holomorphe sur B_α .

De plus $\forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in B_\alpha, |f(t)\rho(t) e^{-itz}| \leq |f(t)\rho(t)| e^{|t|\alpha/2}$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_I |f(t)\rho(t)| e^{|t|\alpha/2} dt \leq \left(\int_I e^{\alpha|t|} \rho(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_I |f(t)|^2 \rho(t) dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Ainsi pour tout $z \in B_\alpha$, on domine l'application $t \mapsto f(t)\rho(t) e^{-itz}$ par l'application $t \mapsto f(t)\rho(t) e^{|t|\alpha/2}$ intégrable sur I .

Donc la fonction $F : z \mapsto \int_I f(t)\rho(t) e^{-itz} dt$ est bien définie sur B_α et par théorème d'holomorphicité sous le signe intégral, F est holomorphe sur B_α .

Par ailleurs, d'après ce théorème,

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) = \int_I f(t)\rho(t) (-it)^n dt = (-i)^n \langle t^n, f \rangle_\rho = 0.$$

Comme F est analytique, F est nulle sur un voisinage de 0. Comme B_α est connexe, par le théorème de prolongement analytique, $F = 0$.

En particulier, $\widehat{\varphi} = 0$. Par injectivité de la transformée de Fourier, $\varphi = 0$ soit $f = 0$.

On a montré que $H^\perp = \{0\}$ ce qui implique que H est dense dans $L^2(I, \rho)$.

Comme la famille des polynômes orthogonaux est - comme son nom l'indique - orthogonale (et même orthonormale si on décide de normaliser les polynômes et pas de les choisir unitaires), c'est suffisant pour démontrer que la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$. $\square$