
Formule des compléments

Lemme — $\forall \alpha \in]0; 1[, \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$

DÉMONSTRATION

Soit $\alpha \in]0; 1[.$

Comme $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et

- $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $]0; 1[$
- $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable sur $[1; +\infty[$,

f est intégrable sur $]0; +\infty[.$

On note $\Omega = \mathbb{C} - [0; +\infty[.$

$f : z \mapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ où $z^\alpha = (r \cdot e^{i\theta})^\alpha = r^\alpha e^{-\alpha\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$, est holomorphe sur $\Omega - \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec

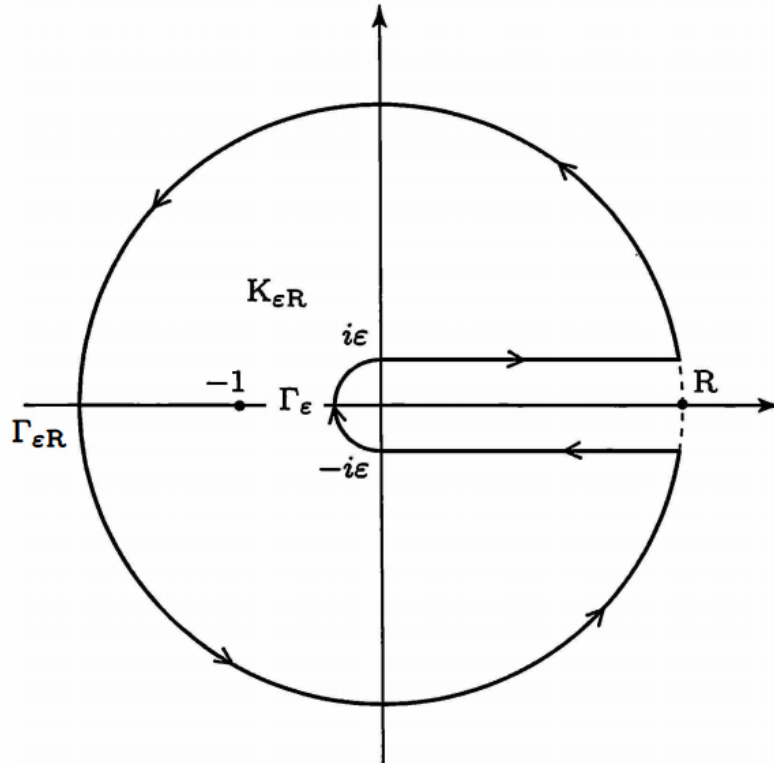
$$\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{\frac{\partial(z^\alpha(1+z))}{\partial z}(-1)} = \frac{1}{[\alpha z^{\alpha-1}(1+z) + z^\alpha](-1)} = \frac{1}{e^{i\pi\alpha}} = e^{-i\pi\alpha}$$

Soit $R > 1$. Pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, on considère le compact $K_{\varepsilon, R}$ délimité par le bord régulier :

- le demi-cercle $C_\varepsilon = \{ |z| = \varepsilon, \Re(z) \leq 0 \}$
- le segment $I_{\varepsilon, R}^+ = [i\varepsilon; i\varepsilon + \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}]$

- l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{z = Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi; \pi] / |\theta| \geq \theta_{\varepsilon,R}\}$
- le segment $I_{\varepsilon,R}^- = [-i\varepsilon; -i\varepsilon + \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}]$

où $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}\right)$.



On calcule l'intégrale de f selon le chemin $\partial K_{\varepsilon,R}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| &= \left| \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{i\varepsilon e^{it}}{(\varepsilon e^{it})^\alpha (1 + \varepsilon e^{it})} dt \right| = \left| i\varepsilon^{1-\alpha} \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{(1-\alpha)it}}{1 + \varepsilon e^{it}} dt \right| \\
 &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{1 - \varepsilon} dt \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1 - \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iRe^{it}}{(Re^{it})^\alpha(1+Re^{it})} dt = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)it}}{1+Re^{it}} dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)it}}{1+Re^{it}} dt \text{ car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_{\varepsilon,R} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Soit $z = i\varepsilon + t \in I_{\varepsilon,R}^+$. Alors $z = \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} e^{i \arctan(\varepsilon/t)}$.

D'où

$$z^\alpha(1+z) = \left(\sqrt{\varepsilon^2 + t^2}\right)^\alpha e^{i\alpha \arctan(\varepsilon/t)}(1+i\varepsilon+t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t^\alpha(1+t).$$

De plus

$$\forall \varepsilon \in]0; 1[, \forall t \in [0; R], \left| \frac{1}{(i\varepsilon + t)^\alpha(1+i\varepsilon+t)} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha(1+t)}.$$

Ainsi d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = \int_0^{\sqrt{R^2+\varepsilon^2}} \frac{1}{(i\varepsilon+t)^\alpha(1+i\varepsilon+t)} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}.$$

Soit $z = -i\varepsilon + t \in I_{\varepsilon,R}^-$.

De même $z = \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} e^{-i \arctan(\varepsilon/t)} = \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} e^{2i\pi - i \arctan(\varepsilon/t)}$.

D'où

$$z^\alpha(1+z) = \left(\sqrt{\varepsilon^2 + t^2}\right)^\alpha e^{2i\pi\alpha - i\alpha \arctan(\varepsilon/t)}(1-i\varepsilon+t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{2i\pi\alpha} t^\alpha(1+t).$$

Par la même domination, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{I_{\varepsilon,R}^-} f(z) dz = \int_0^0 \frac{1}{(-i\varepsilon+t)^\alpha(1-i\varepsilon+t)} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -e^{-2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}.$$

Or d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2i\pi \cdot 1 \cdot e^{-i\pi\alpha}$$

En passant à la limite, on obtient

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)it}}{1+Re^{it}} dt = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

Comme

$$\forall R > 1, \forall t \in [0; 2\pi], \left| \frac{iR^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)it}}{1 + Re^{it}} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \leq \frac{R^{\alpha-1}}{R} = \frac{1}{R^\alpha} \xrightarrow{+\infty} 0$$

d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)it}}{1 + Re^{it}} dt = 0.$$

Donc

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

Théorème

$$\forall z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1, \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

DÉMONSTRATION

Soit $\alpha \in]0; 1[$.

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds \right) \\ &= \int_{]0;+\infty[^2} \frac{1}{t} \left(\frac{t}{s} \right)^\alpha e^{-(s+t)} dt ds \text{ par Fubini-Tonelli} \\ &= \int_{]0;+\infty[^2} \frac{1+v}{uv} v^\alpha e^{-u} |J_{(u,v)}| dudv\end{aligned}$$

par le changement de variables $(t, s) \mapsto \left(t + s, \frac{t}{s} \right)$

de réciproque $(u, v) \mapsto \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v} \right)$

$$\begin{aligned}&= \int_{]0;+\infty[^2} \frac{1+v}{uv} v^\alpha e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2} dudv \\ \text{car } J_{(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{-uv}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3} = \frac{-u}{(1+v)^2} \\ &= \int_{]0;+\infty[^2} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} e^{-u} dudv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} du \right) dv \text{ par Fubini-Tonelli} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.\end{aligned}$$

Ainsi l'application $z \mapsto \Gamma(z) \Gamma(1 - z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ est holomorphe sur le connexe $\{0 < \Re(z) < 1\}$ et nulle sur $]0; 1[$.

D'après le principe des zéros isolés, on en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1, \Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad \square$$