Dimension du commutant

Lemme — $\forall A \in \mathcal{M}_n(K),\ \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n.$

DÉMONSTRATION
On note $\overline{K}$ la clôture algébrique de K. Le polynôme caractéristique χ_A y est scindé et A y est trigonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n\left(\overline{K}\right)$ et $T \in \mathcal{T}_n\left(\overline{K}\right)$ (triangulaire supérieure) tels que $A = PTP^{-1}$.

On pose $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \to & \mathcal{M}_n(K) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array}$ et $\tilde{\varphi}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n\left(\overline{K}\right) & \to & \mathcal{M}_n\left(\overline{K}\right) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array}$.

Le cœur de la démonstration repose sur les égalités

$$\mathcal{C}(A) = \ker \varphi \text{ et } \mathrm{rg}\ \varphi = \mathrm{rg}\ \tilde{\varphi}.$$

On note $E = P\mathcal{T}_n\left(\overline{K}\right)P^{-1}$ sous-espace verctoriel de $\mathcal{M}_n\left(\overline{K}\right)$.

On remarque que

$\forall X = PX'P^{-1} \in E,\ P^{-1}\tilde{\varphi}(X)P = TX' - X'T$ triangulaire supérieure <u>stricte</u>

ce qui donne

$$\mathrm{rg}\ (\tilde{\varphi}|_E) = \mathrm{rg}\ (P^{-1}\tilde{\varphi}|_E\ P) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'où

$$\dim \ker \tilde{\varphi} \geqslant \dim \ker \tilde{\varphi}|_E = \dim E - \mathrm{rg}\ (\tilde{\varphi}|_E) = \dim \mathcal{T}_n\left(\overline{K}\right) - \mathrm{rg}\ (\tilde{\varphi}|_E) \geqslant n.$$

Or

$$\dim \ker \varphi = \dim_K \mathcal{M}_n(K) - \mathrm{rg}\ (\varphi) = \dim_{\overline{K}} \mathcal{M}_n\left(\overline{K}\right) - \mathrm{rg}\ (\tilde{\varphi}) = \dim \ker \tilde{\varphi}.$$

On conclut

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \ker \varphi \geqslant n.$$

□

Lemme — $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)\,,\ \dim \mathcal{C}(A) = \deg \mu_A \leqslant n.$

Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. *Alors* $\mathcal{C}(A) = K[A] \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A$.

DÉMONSTRATION

$\Leftarrow$ On suppose $\mu_A = \chi_A$.
On sait qu'il existe $x \in K^n$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$ qui est de degré n.
En particulier, $(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$ est une base de K^n. A est cyclique.

L'application $\psi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A) & \to & K^n \\ B & \mapsto & Bx \end{array}$ est injective.
En effet, si $Bx = 0$ alors

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!]\,,\ BA^k x = A^k Bx = 0.$$

Comme $(A^k x)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ forme une base de K^n, on en déduit que $B = 0$.

Par théorème du rang, on obtient

$$\dim \mathcal{C}(A) = \text{rg}\ \psi \leqslant \dim K^n = n.$$

D'après les lemmes, $\dim K[A] = n$ et $\dim \mathcal{C}(A) = n$.
On conclut par l'inclusion $K[A] \subset \mathcal{C}(A)$.

$\Rightarrow$ On suppose $\mathcal{C}(A) = K[A]$.
D'après les lemmes on en déduit que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim K[A] = n$, soit

$$\deg \mu_A = n.$$

Comme $\mu_A \mid \chi_A$, on conclut par égalité des degrés. $\square$